1. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

2. 이차부등식 $x^2-6x+9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다　　② $x=3$

③ $x \neq 3$인 모든실수　　④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$,　(실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

3. 이차부등식 $x^2-6x+9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$

② x는 모든 실수

③ $x \ne 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2-6x+9 \le 0$

$(x-3)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 3$

4. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k < x-2 < k$

$-k+2 < x < k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

5. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

i) $x<-2$일 때

$$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2 \le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2 \le x<0$

iii) $x \ge 2$일 때

$$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : -2, -1 (2개)

6. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

7. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

a의 최솟값은 -1

8. 모든 실수 x에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx-3)+3>0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2+3x+3>0$

$D=3^2-4\times(1-k)\times 3<0$

$\therefore k<\dfrac{3}{12}=0.25$

최대 정수 $k=0$

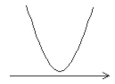
9. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\dfrac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\ \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

11. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

> 가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 ㈎ cm 이다.
> 이때, x 의 값의 범위는 ㈏이다.
> 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)$=$ x ㈎이다.
> 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ ㈎ $\geq$ ㈐
> 이식을 정리하면 ㈑ ≤ 0
> ㈑를 인수분해하면 ㈒이다.
> 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

다음 중 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑, ㈒ 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

① ㈎ $(14-x)$
② ㈏ $0<x<14$
③ ㈐ 45
④ ㈑ $14x-x^2-45$
⑤ ㈒ $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
$=2$(가로의 길이 $+$ 세로의 길이)
$28=2x+2\cdot$㈎, $14=x+$㈎
$\therefore$ ㈎ $=14-x$
가로의 길이의 범위 : $x>0$, $14-x>0\rightarrow x<14$
$\therefore\ 0<x<14\ \cdots$ ㈏
직사각형의 넓이 : $x(14-x)\geq 45$
$\therefore$ ㈐ $=45$
㈑ $=x^2-14x+45\leq 0$
㈒ $=(x-5)(x-9)\leq 0$

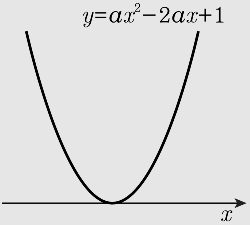
12. 부등식 $ax^2-2ax+1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y=ax^2-2ax+1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a>0$
(ii) $ax^2-2ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-a=0$ 에서 $a=0$ 또는 $a=1$
(i), (ii) 에서 $a=1$

13. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ ∴ $x>2$ ······㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$······㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

$\therefore a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{2}=2$

14. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b의 값을 구하면?

$x^2 - 2x - 3 < 3\lvert x-1\rvert \cdots$ ㉠ $ax^2 + 2x + b > 0 \cdots$ ㉡

① $a = -1,\ b = 15$ ② $a = -2,\ b = 14$

③ $a = -3,\ b = 13$ ④ $a = -4,\ b = 12$

⑤ $a = -5,\ b = 10$

해설

㉠ 부등식에서 $x \geq 1$일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$

$\therefore x^2 - 5x < 0$이므로 $0 < x < 5$

$\therefore 1 \leq x < 5 \cdots$ ㉠

$x < 1$일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$

$x^2 + x - 6 < 0$이므로 $(x-2)(x+3) < 0$

$\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-3 < x < 5$

$\therefore a(x+3)(x-5) < 0$

$\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$

$ax^2 + 2x + b > 0$와 일치해야 하므로

$a = -1,\ b = 15$

15. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b < 25$
② $a = 20,\ 0 < b < 25$
③ $a = 20,\ b > 25$
④ $0 < a < 20,\ b > 25$
⑤ $0 < a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한다

$\Rightarrow\quad x^2 + 2(2y+5) + 4y^2 + ay + b > 0$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$D' = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$

$\Rightarrow\quad (20-a)y + 25 - b < 0$

임의의 x, y에 대해 성립하려면, $a = 20,\quad b > 25$

16. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\dfrac{1}{\alpha} < x < \dfrac{1}{\beta}$　　② $\dfrac{1}{\beta} < x < \dfrac{1}{\alpha}$

③ $x < \dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \dfrac{1}{\beta}$　　④ $x < \dfrac{1}{\beta}$ 또는 $x > \dfrac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\dfrac{1}{\alpha} < 0 < \dfrac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \dfrac{1}{\beta}$

17. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여

부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠

이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.

㉠식을 정리하면

$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$

㉡식이 항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$$

$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$

$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$

이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나

-1 은 속하지 않는다.

18. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

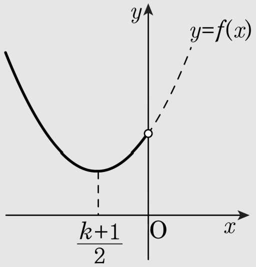
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



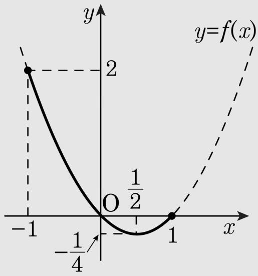
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore\ 100p = 325$

19. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$　　② $-2 < x < 3$　　③ $2 \leq x < 3$

④ $2 < x \leq 3$　　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$에서

$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$

$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$

$x^2 + 1 > 0$이므로 $x - 2 \geq 0$

$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x-3)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$2 \leq x < 3$이다.

20. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$x^2-2x-3>3x-3$, $x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$, $x<0$ 또는 $x>5$

$\therefore x>5$

2) $x<1$ 일 때,

$x^2-2x-3>-3x+3$, $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$, $x<-3$ 또는 $x>2$

$\therefore x<-3$

1), 2)에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가

$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로

$a<0$이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$이다.

$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$에서

$a=-1, c=15 \quad \therefore a+c=14$

21. $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$ (단, n은 정수) 인 실수 x에 대하여 $\{x\}=n$으로 나타낼 때, 방정식 $\left\{x^2-x-\frac{1}{2}\right\}=3x+1$의 근을 α, β라 하자. 이 때, $9\alpha\beta$의 값을 구하면?

① 13 ② -13 ③ 15 ④ -15 ⑤ 17

해설

$3x+1$은 정수이므로

$(3x+1)-\frac{1}{2} \le x^2-x-\frac{1}{2} < (3x+1)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x^2-4x+4 < 6$

$\therefore\ 5 \le (x-2)^2 < 6$

이때, $3x+1$이 정수이므로 $3x$도 정수,

$3x=k$(k는 정수)라 하면 $x=\frac{k}{3}$

$\therefore\ 5 \le \left(\frac{k-6}{3}\right)^2 < 6$

$\therefore\ 45 \le (k-6)^2 < 54 \quad \therefore\ k=-1,\ 13$

$k=-1$일 때 $x=-\frac{1}{3}$,

$k=13$일 때 $x=\frac{13}{3}$

$\therefore\ 9\alpha\beta=-13$