1. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

2. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
w^3 = 1 &\Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\
&\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 \\
&= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 \\
&= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1
\end{aligned}
$$

3. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6 + \omega^2 + \omega + 1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$(\omega^3)^2 + (\omega^2 + \omega + 1) = 1^2 + 0 = 1$

4. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ ω　　⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0,\ \omega^3 = 1$

$\Rightarrow (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

5. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)\end{aligned}$$

6. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i}$$

$$= -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$$

$$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

7. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

8. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1 ② $0, 8$ ③ $-1, 8$

④ $-1, 0, -8$ ⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때

$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$

(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때

$D=a^2-8a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 8

(i), (ii)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$

9. 삼차방정식 $x^3 + mx + n = 0$이 중근 α와 또 다른 실근을 가질 때, n을 α를 써서 나타내면?

① α^2　② α^3　③ $2\alpha^3$　④ α^4　⑤ $2\alpha^4$

해설

$x^3 + mx + n = (x-\alpha)^2(x+\beta)$
$= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x+\beta)$
$= x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta$
$= \beta - 2\alpha = 0$

즉, $\beta = 2\alpha$이므로 $n = 2\alpha^3$

10. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$　　② $1 \le k < 2$　　③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$　　⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

11. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

12. x에 관한 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 - bx + 3 = 0$의 한 근이 1이고, $a + b + 1 = 0$일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3 ② $-1,\ 2$ ③ $-1,\ 3$

④ $-1,\ \frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$, 3

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x = 1$을 대입하면

$2 + a - b + 3 = 0,\ a - b = -5$

주어진 조건인 $a + b + 1 = 0$과 연립하여 풀면

$a = -3,\ \ b = 2$

$\therefore\ 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

$(x-1)(2x^2 - x - 3) = 0$

$(x-1)(2x-3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ \frac{3}{2},\ -1$

13. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ 1 ⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$

$a,\ b$는 실수이므로 $a=1,\ \ b=0$

$x^3+x=0,\ x(x^2+1)=0,\ \ x=0,\ i,\ \ -i$

$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

14. 이차방정식 $x^2 + 5x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{3}i$ ② $\sqrt{3}i$ ③ $\sqrt{7}i$ ④ $\pm\sqrt{7}i$ ⑤ 0

해설

$D > 0$이므로 α, β는 실수

$\alpha + \beta = -5,\ \alpha\beta = 1 \quad \therefore \alpha < 0, \beta < 0$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = -7$$

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{7}i$

$\sqrt{-\alpha}i + \sqrt{-\beta}i = (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})i$ 의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$가 구하는 값이 될 수 없다.

15. 실수 x가 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$을 만족시킬 때, x^2+3x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

분명히 $x \neq 0$이므로
양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}^{2}$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x}^{2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)=0$$

$$\therefore (x^2+3x+1)(x^2-x+1)=0$$

x는 실수이므로 $x^2+3x+1=0$

$$\therefore x^2+3x=-1$$