1. 명제 '$a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다 '의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면$a > b$이다 ② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$이다 ④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$

2. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.
② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.
③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.
④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.
⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$

3. 명제 $p \to \sim q$ 의 대우는?

① $p \to q$ ② $\sim q \to p$ ③ $\sim q \to \sim p$
④ $\sim p \to q$ ⑤ $q \to \sim p$

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$, $p \to \sim q$ 의 대우는 $\sim (\sim q) \to \sim p$
$\therefore q \to \sim p$

4. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

5. 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건일 때, 조건 q 는 조건 p 이기 위한 (가) 조건이고, 조건 $\sim p$ 는 조건 $\sim q$ 이기 위한 (나) 조건이다. (가), (나) 에 각각 알맞은 것은?

① 필요, 필요　　② 충분, 충분

③ 필요, 충분　　④ 충분, 필요

⑤ 필요충분, 충분

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건 : $p \Rightarrow q$
(가) : $p \Rightarrow q$ 이면 q 는 p 이기 위한 필요조건
(나) : $p \Rightarrow q$ 이면 그 대우 $\sim q \Rightarrow \sim p$ $\therefore \sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건

6. 세 수 $A=3\sqrt{3}-1,\ B=\sqrt{3}+2,\ C=2\sqrt{3}+1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C<B<A$　② $A<B<C$　③ $A<C<B$
④ $B<A<C$　⑤ $B<C<A$

해설

i) $A-B=(3\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)$
$=2\sqrt{3}-3=\sqrt{12}-\sqrt{9}>0$
$\therefore A>B$

ii) $B-C=(\sqrt{3}+2)-(2\sqrt{3}+1)$
$=1-\sqrt{3}<0$
$\therefore B<C$

iii) $C-A=(2\sqrt{3}+1)-(3\sqrt{3}-1)$
$=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$
$\therefore C>A$

따라서 $B<A<C$

7. $x > 0$, $y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, $\sqrt{2(x+y)} > 0$

이 때 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y)$

$= -(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le 0$

이므로 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \le \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \le \sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, 즉 $x = y$일때성립)

8. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(x+\dfrac{1}{2y}\right)\left(8y+\dfrac{1}{x}\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\left(x+\frac{1}{2y}\right)\left(8y+\frac{1}{x}\right)=8xy+\frac{1}{2xy}+5$$
$$\geq 2\sqrt{8xy\times\frac{1}{2xy}}+5$$
$$=4+5=9$$

9. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

$12=2a+3b\geq 2\sqrt{6ab}$

$6\geq\sqrt{6ab},\ 36\geq 6ab\quad\therefore 6\geq ab$

10. 실수 x, y가 $x^2+y^2=1$을 만족할 때, 곱 xy의 최댓값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \ge 0,\ y^2 \ge 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x^2+y^2}{2} \ge \sqrt{x^2y^2}$ 이고

$\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy|$ 이므로 $|xy| \le \frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le xy \le \frac{1}{2}$

그러므로 xy의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

11. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$　　② $Q^c \subset P$　　③ $P \subset Q^c$

④ $P \cup Q = P$　　⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

12. 전체집합 U 에서 두 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　　② $P \cap Q = \varnothing$　　③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$　　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

13. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$ ⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

14. 명제「$p \to \sim q$」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \to q$　② $q \to p$　③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$　⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「$q \to \sim p$」도 참이다.

15. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.

③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.

④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.

⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

16. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수)
> 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
$\therefore$ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
$\therefore$ (나)– $2k$

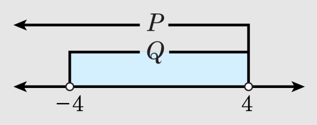
17. $x < 4$는 $-4 < x < 4$이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, q : $-4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

18. 다음 (　　　)안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

19. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건
② 필요조건
③ 대우
④ 필요충분조건
⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

20. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

21. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분

③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

22. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - \ |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + \boxed{가} + b^2 - (a^2 + \boxed{나} + b^2)$
> $= 2(\boxed{다}) \geq 0$
> (단, 등호는 $\boxed{라} \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

23. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

24. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2(\quad ㉠ \quad) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0,\ |a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

25. 다음 중 명제 '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

'어떤' 의 부정은 '모든' 이고 '음수이다.' 의 부정은 '음수가 아니다.' 이다.
따라서, '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정은 '모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.' 이다.

26. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’ 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘p 이면 q 이다’ 가 ‘p 이면 q 가 아니다’ 이고, ‘모든’ 의 부정은 ‘어떤’ 이므로 ‘<u>모든 중학생은</u>(p) <u>고등학교에 진학한다</u>(q)’ 의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’ 이다.

27. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$' 의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$　② $A^c \cap (B \cap C)^c$　③ $A \cap (B \cup C)^c$

④ $A \cup (B \cup C)^c$　⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$

$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$

$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$

$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$

$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

28. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

㉠ $2a^2-3b^2=ab$ 이면 $a+b=0$ 이다.
㉡ x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
㉢ 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
㉣ x 가 3 의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.
㉤ 사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설
㉠ $2a^2-ab-3b^2=0$, $(a+b)(2a-3b)=0$
∴ $a+b=0$ 또는 $2a-3b=0$ 이므로 거짓
㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참
㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓
㉣ 반례 : $x=6$ 일 때 $x+1=7$(홀수)
㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.
∴ ㉡만 참이다.

29. 다음 명제 중 참인 것은?

① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$는 무리수이다.

② $x < y$이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)

③ $\triangle ABC$가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.

④ $a + b$가 짝수이면 a, b는 짝수이다.

⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
④ 반례 : $a = 1, b = 3$
⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

30. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

> ㉠ $a > b$이면 $a^2 > b^2$이다.
>
> ㉡ 정사각형은 마름모이다.
>
> ㉢ 임의의 유리수 x에 대하여 $\sqrt{2}x$는 무리수이다.
>
> ㉣ $a + b > 0$이면 $a > 0$이고 $b > 0$이다.
>
> ㉤ x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣　④ ㉡, ㉤　⑤ ㉣, ㉤

해설

(반례) ㉠ $a = 1, b = -4$ ㉢ $x = 0$ ㉣ $a = 5, b = -4$
$\therefore$ ㉡, ㉤만 참이다.

31. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $p \to \sim r$ ③ $q \to r$
④ $r \to p$ ⑤ $r \to \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P,\ Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \to p$, $q \to r$ 등이 참인 명제가 된다.

32. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.

② 두 자연수 m, n 에 대하여 m^2+n^2 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.

⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m=2$, $n=1$ 인 경우

33. 두 조건 $p : 2 \le x < 5$, $q : a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10　② -9　③ -6　④ -5　⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.
$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \ge 5$ 이므로 $a < 1$, $a \ge -4$
따라서 $-4 \le a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

34. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2-a^2x+2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x=1$ 이면 $ax^2-a^2x+2=0$ 이다.' 가 참이므로
$a-a^2+2=0,\ a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$
$a>0$ 이므로 $a=2$

35. 다음은 명제 「x, y가 정수일 때 xy가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 결론을 부정하여 (가) 이면 $x = 2m+1, y =$ (나)(m, n 은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn+m+n)+1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① x 또는 y 가 짝수, $2n$

② x , y 중 하나만 짝수, $2n$

③ x , y 중 하나만 홀수, $2n+1$

④ x , y 모두 홀수, $2n+1$

⑤ x , y 모두 짝수, $2n+1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m+1$, (나) : $y = 2n+1$ (m, n은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn+m+n)+1$ 이므로 xy는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

36. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a>20,\ \ b>25$

② $a>=20,\ \ b>25$

③ $a>20,\ \ b=25$

④ $a=20,\ \ b>25$

⑤ $a=20,\ \ b<25$

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0$

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$(20-a)y+25-b<0$

이것이 임의의 실수 y에 대하여 항상 성립할 조건은

$20-a=0,\ 25-b<0$

$\therefore\ a=20,\ b>25$

37. $a>0,\ b>0$ 일 때, $(a-b)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a-b)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{4}{b}\right)$

$=5-\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)\leq 5-2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{4a}{b}}=1$

38. $a+b=9$를 만족하는 양수 a, b에 대하여 $[ab]$의 최댓값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2$, $ab \leq 20.25$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

39. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로

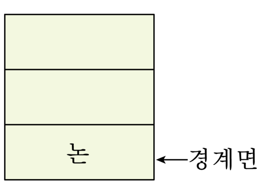
$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x}$에서

$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$

$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$

$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$

40. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 $27\mathrm{m}^2$인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원　② 71만원　③ 72만원
④ 73만원　⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\dfrac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$3\times 2x+3\times\dfrac{27}{x}\times 2+\dfrac{27}{x}\times 2$

$=6x+\dfrac{162}{x}+\dfrac{54}{x}$

$=6x+\dfrac{216}{x}$

$\geq 2\sqrt{6x\cdot\dfrac{216}{x}}$

$=2\sqrt{1296}=2\times 36=72$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

41. 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \to \sim q$　　② $q \to p$　　③ $q \to \sim r$
④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$
$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$
$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.
$\therefore$ 대우 : $\sim r \to \sim p$ 도 참이다.

42. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$　　⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

43. A, B, C 세 사람이 각각 빨강, 파랑, 검정색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A 는 항상 참만을 말하고 C 는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 말했다.

> ㉠ 빨강 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
>
> ㉡ 검정 모자를 쓴 사람 : 자신이 B 이다.
>
> ㉢ 파랑 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 A 이다.

위의 진술로부터 이끌어 낼 수 있는 사실이 아닌 것은?

① 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
② 빨강 모자를 쓴 사람은 A 이다.
③ 파랑 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
④ 파랑 모자를 쓴 사람은 C 가 아니다.
⑤ 검정 모자를 쓴 사람은 A 가 아니다.

해설

세 진술은 검정 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다. A는 항상 참만을 말하므로 참말은 A 가 했고, B, C는 거짓말을 했다. 만약 A가 검정 모자를 썼다면 ㉢의 말, 즉 파랑 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다. 만일 B가 검정 모자를 썼다면 ㉡의 말, 즉 B 가 참말을 했으므로 모순이다. 따라서 C 가 검정 모자를 썼고, 그 말을 한 빨강 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로, A는 빨강 모자를 썼다. 따라서 파랑 모자를 쓴 사람은 B이다. 그러므로 파랑 모자를 쓴 사람, 즉 B는 거짓말을 했다.

44. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참
② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

45. 다음은 ‘x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’ 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다) 에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

> 주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가) 이면 xy 도 (가) 이다.’ 이다.
> $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
> $xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나) 가 된다.
> 따라서, 대우가 (다) 이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’ 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

46. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가? (단 x, y는 실수이다.)

> ㉠ p : $-1 < x < 1$ q : $x < 3$
>
> ㉡ p : $|x-1| = 2$ q : $x^2 - 2x + 3 = 0$
>
> ㉢ p : $x^2 + y^2 = 0$ q : $xy = 0$
>
> ㉣ $p : A^c \cup B = U$ $q : A \subset B$
>
> ㉤ $p : |x| = 1$ $q : x = 1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉡ p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.
㉢ p는 q이기 위한 충분조건만 된다.
㉣ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
즉, $A^c \cup B = U$와 $A \subset B$은 동치이다.
㉤ p는 q이기 위한 필요조건만 된다.
$\therefore$ 1개

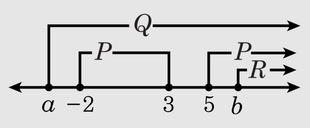
47. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

p : $-2 \le x \le 3$ or $x \ge 5$ q : $x \ge a$ r : $x \ge b$

① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$a \le -2,\ 5 \le b$

a 의 최댓값 -2, b 의 최솟값 5

$\therefore\ -2+5=3$

48. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$　② $P \geq Q$　③ $P=Q$

④ $P<Q$　⑤ $P \leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1$, $0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$
\begin{aligned}
P &= a^3+b^3 = a^3+(1-a)^3 \\
&= a^3+1-3a+3a^2-a^3 \\
&= 3a^2-3a+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= a^2+b^2 = a^2+(1-a)^2 \\
&= a^2+a^2-2a+1 \\
&= 2a^2-2a+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P-Q &= 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1 \\
&= a^2-a = a(a-1)
\end{aligned}
$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

49. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

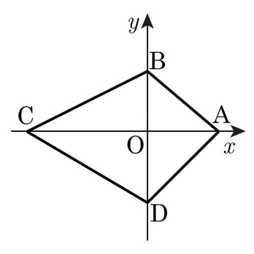
$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

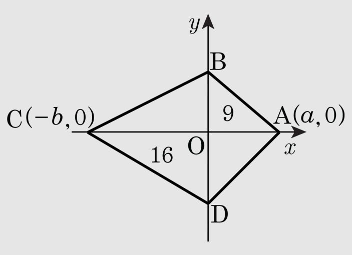
(등호 성립조건은 $a = b = c$)

50. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　② 40　③ 43　④ 46　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

($\square$ABCD의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$\square$ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$