

1. 명제 ' $a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다'의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면 $a > b$ 이다

② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$ 이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$ 이다

④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$$

2. 명제 ‘ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다’ 의 대우는?

- ① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.
- ② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.
- ③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.
- ④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.
- ⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$

3. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$

② $\sim q \rightarrow p$

③ $\sim q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$

$\therefore q \rightarrow \sim p$

4. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

- ① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.
- ② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.
- ③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.
- ④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.
- ⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 ' $p \rightarrow q$ '의 대우는 ' $\sim q \rightarrow \sim p$ '이다.

p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.

따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

5. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건일 때, 조건 q 는 조건 p 이기 위한 (가)조건이고, 조건 $\sim p$ 는 조건 $\sim q$ 이기 위한 (나)조건이다. (가), (나)에 각각 알맞은 것은?

① 필요, 필요

② 충분, 충분

③ 필요, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 필요충분, 충분

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건: $p \Rightarrow q$

(가) : $p \Rightarrow q$ 이면 q 는 p 이기 위한 필요조건

(나) : $p \Rightarrow q$ 이면 그 대우 $\sim q \Rightarrow \sim p \therefore \sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건

6. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned}\text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A\end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

7. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned}\text{이 때 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \{\sqrt{2(x+y)}\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이므로 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &\leq \{\sqrt{2(x+y)}\}^2 \\ \therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) &\leq \sqrt{2(x+y)} \\ (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} &= \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

8. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right) \left(8y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2y}\right) \left(8y + \frac{1}{x}\right) &= 8xy + \frac{1}{2xy} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5 \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

9. $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, \quad 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

10. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때, 곱 xy 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} \text{ 이고}$$

$$\sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy| \text{ 이므로 } |xy| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$$

그러므로 xy 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

11. 명제 ' $p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$

② $Q^c \subset P$

③ $P \subset Q^c$

④ $P \cup Q = P$

⑤ $P \subset Q$

해설

' $p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.'가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

12. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$

② $P \cap Q = \emptyset$

③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$

⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

13. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$

② $P \cup Q$

③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$

⑤ $Q - P$

해설

$p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으려면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

14. 명제「 $p \rightarrow \sim q$ 」가 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이므로 대우「 $q \rightarrow \sim p$ 」도 참이다.

15. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

16. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』
임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은
것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n = (\text{나})$ (단, k 는 자연수)
따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

- ① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k + 1$
④ 역, $2k + 1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

‘ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.’의 대우는 ‘ n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.’

∴ (가)-대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$

∴ (나)- $2k$

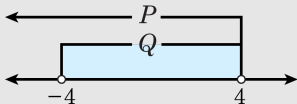
17. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4$, $q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

18. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

19. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

① 충분조건

② 필요조건

③ 대우

④ 필요충분조건

⑤ 아무조건도 아니다.

해설

정삼각형 $\subset$ 이등변삼각형

20. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

21. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

22. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
 ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
 ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
 ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

23. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

24. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2$$

그런데 $|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ 이므로

$|a| + |b| \geq |a + b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

② $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$

③ $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$

④ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$

⑤ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

해설

$$\text{㉠} : |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$$

$$= 2(|ab| - ab)$$

㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립

$$\Rightarrow |ab| = ab$$

㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \geq 0$ 이어야 한다

25. 다음 중 명제 ‘어떤 실수의 제곱은 음수이다.’의 부정으로 옳은 것은?

- ① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
- ② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
- ③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
- ④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
- ⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

‘어떤’의 부정은 ‘모든’이고 ‘음수이다.’의 부정은 ‘음수가 아니다.’이다.

따라서, ‘어떤 실수의 제곱은 음수이다.’의 부정은 ‘모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.’이다.

26. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’의 부정인 명제는?

- ① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.
- ② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.
- ③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.
- ④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.
- ⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘ p 이면 q 이다’가 ‘ p 이면 q 가 아니다’이고, ‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’이다.

27. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 ' $f(x) \neq 0$ 이고 ($g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0$)'의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$

② $A^c \cap (B \cap C)^c$

③ $A \cap (B \cup C)^c$

④ $A \cup (B \cup C)^c$

⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.

$$\sim [f(x) \neq 0 \text{ 이고 } (g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0)]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ 또는 } \sim [g(x) = 0 \text{ 또는 } h(x) = 0]$$

$$\Leftrightarrow f(x) \text{ 또는 } [g(x) \neq 0 \text{ 이고 } h(x) \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$$

$$\Leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$$

28. 다음 명제 중 참인 것의 개수를 구하면?

- ㉠ $2a^2 - 3b^2 = ab$ 이면 $a + b = 0$ 이다.
- ㉡ x 가 무리수 이면 x 는 무한소수이다.
- ㉢ 무한소수는 분수로 나타낼 수 없다.
- ㉣ x 가 3 의 배수이면 $x + 1$ 은 짝수이다.
- ㉤ 사각형의 대각선이 직교하면 마름모이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 0개

해설

㉠ $2a^2 - ab - 3b^2 = 0$, $(a + b)(2a - 3b) = 0$

∴ $a + b = 0$ 또는 $2a - 3b = 0$ 이므로 거짓

㉡ 무리수는 순환하지 않는 무한소수이므로 참

㉢ 순환하는 무한소수는 유리수이므로 거짓

㉣ 반례 : $x = 6$ 일 때 $x + 1 = 7$ (홀수)

㉤ 대각선이 직교하는 사각형이 모두 마름모는 아니다. 정사각형도 있다.

∴ ㉡만 참이다.

29. 다음 명제 중 참인 것은?

- ① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.
- ② $x < y$ 이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)
- ③ $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.
- ④ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 는 짝수이다.
- ⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

- ① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
- ② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
- ③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
- ④ 반례 : $a = 1, b = 3$
- ⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

30. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

㉠ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

㉡ 정사각형은 마름모이다.

㉢ 임의의 유리수 x 에 대하여 $\sqrt{2}x$ 는 무리수이다.

㉣ $a + b > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.

㉤ x 가 6의 약수이면 x 는 12의 약수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉤

⑤ ㉣, ㉤

해설

(반례) ㉠ $a = 1, b = -4$ ㉢ $x = 0$ ㉣ $a = 5, b = -4$

$\therefore$ ㉡, ㉤만 참이다.

31. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow \sim r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P, Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ 등이 참인 명제가 된다.

32. 다음 명제 중 거짓인 명제는?

① 두 삼각형이 합동이면 넓이가 같다.

② 두 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 이 홀수이면 mn 은 홀수이다.

③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 은 짝수이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 \leq 0$ 이다.

⑤ 정사각형은 평행사변형이다.

해설

② (반례) $m = 2, n = 1$ 인 경우

33. 두 조건 $p : 2 \leq x < 5$, $q : a + 1 < x < a + 9$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10

② -9

③ -6

④ -5

⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P , 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a + 1 < 2$ 이고 $a + 9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

34. 양수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

' $x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로

$$a - a^2 + 2 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 2$$

35. 다음은 명제 「 x, y 가 정수일 때 xy 가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 결론을 부정하여 (가)이면 $x = 2m + 1, y = (나)$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① x 또는 y 가 짝수, $2n$
- ② x, y 중 하나만 짝수, $2n$
- ③ x, y 중 하나만 홀수, $2n + 1$
- ④ x, y 모두 홀수, $2n + 1$
- ⑤ x, y 모두 짝수, $2n + 1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y 가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m + 1$, (나): $y = 2n + 1$ (m, n 은 정수)이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn + m + n) + 1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

36. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, b > 25$

② $a \geq 20, b > 25$

③ $a > 20, b = 25$

④ $a = 20, b > 25$

⑤ $a = 20, b < 25$

해설

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$(20 - a)y + 25 - b < 0$$

이것이 임의의 실수 y 에 대하여 항상 성립할 조건은

$$20 - a = 0, 25 - b < 0$$

$$\therefore a = 20, b > 25$$

37. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a - b) \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} \right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(a - b) \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} \right)$$

$$= 5 - \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \leq 5 - 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 1$$

38. $a + b = 9$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 $[ab]$ 의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2, ab \leq 20.25$$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

39. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

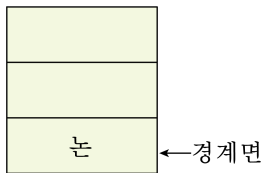
$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

40. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면

가로 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

41. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$

② $q \rightarrow p$

③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

42. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \emptyset$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow \sim r$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $q \rightarrow r$

④ $q \rightarrow \sim r$

⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

$$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

$$P \cap R = \emptyset \Rightarrow p \rightarrow \sim r \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p \quad q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r \text{ 이므로 } q \rightarrow \sim r$$

43. A, B, C 세 사람이 각각 빨강, 파랑, 검정색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A 는 항상 참만을 말하고 C 는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 말했다.

- ㉠ 빨강 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ㉡ 검정 모자를 쓴 사람 : 자신이 B 이다.
- ㉢ 파랑 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 A 이다.

위의 진술로부터 이끌어 낼 수 있는 사실이 아닌 것은?

- ① 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ② 빨강 모자를 쓴 사람은 A 이다.
- ③ 파랑 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
- ④ 파랑 모자를 쓴 사람은 C 가 아니다.
- ⑤ 검정 모자를 쓴 사람은 A 가 아니다.

해설

세 진술은 검정 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다. A는 항상 참만을 말하므로 참말은 A가 했고, B, C는 거짓말을 했다. 만약 A가 검정 모자를 썼다면 ㉢의 말, 즉 파랑 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다. 만일 B가 검정 모자를 썼다면 ㉡의 말, 즉 B가 참말을 했으므로 모순이다. 따라서 C가 검정 모자를 썼고, 그 말을 한 빨강 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로, A는 빨강 모자를 썼다. 따라서 파랑 모자를 쓴 사람은 B이다. 그러므로 파랑 모자를 쓴 사람, 즉 B는 거짓말을 했다.

44. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「 $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 ' $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다' 의 대우인 ' $(가)$ 이면 $x^2 + y^2 \neq 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
(가)에서 $x^2 + y^2 > (나)$ 이므로 $x^2 + y^2 \neq 1$ 가 성립한다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1, 1$, 참

② $x > 1$ 이고 $y > 1, 2$, 참

③ $x > 1$ 또는 $y > 1, 2$, 참

④ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1, 1$, 거짓

⑤ $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1, 2$, 거짓

해설

$x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.

x, y 가 모두 1보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2보다 크게 된다.

또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

45. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.

$x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면

$xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.

따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참

③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참

⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.

$x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면

$xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.

따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

46. 다음 보기 중에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?
(단 x, y 는 실수이다.)

㉠ $p : -1 < x < 1 \quad q : x < 3$

㉡ $p : |x - 1| = 2 \quad q : x^2 - 2x + 3 = 0$

㉢ $p : x^2 + y^2 = 0 \quad q : xy = 0$

㉣ $p : A^c \cup B = U \quad q : A \subset B$

㉤ $p : |x| = 1 \quad q : x = 1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.

㉡ p 는 q 이기 위한 아무 조건도 아니다.

㉢ p 는 q 이기 위한 충분조건만 된다.

㉣ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

즉, $A^c \cup B = U$ 와 $A \subset B$ 은 동치이다.

㉤ p 는 q 이기 위한 필요조건만 된다.

$\therefore$ 1개

47. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

$$p : -2 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 5$$

$$q : x \geq a$$

$$r : x \geq b$$

① 5

② 3

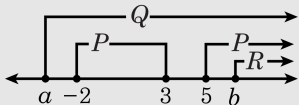
③ 0

④ -3

⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$$a \leq -2, 5 \leq b$$

a 의 최댓값 -2 , b 의 최솟값 5

$$\therefore -2 + 5 = 3$$

48. 양수 a, b 가 $a+b=1$ 을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3, Q=a^2+b^2$ 의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$

② $P \geq Q$

③ $P = Q$

④ $P < Q$

⑤ $P \leq Q$

해설

a, b 는 양수이고 $a+b=1$ 이므로

$$0 < a < 1, 0 < b < 1$$

또 $b=1-a$ 이므로

$$P = a^3 + b^3 = a^3 + (1-a)^3$$

$$= a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3$$

$$= 3a^2 - 3a + 1$$

$$Q = a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2$$

$$= a^2 + a^2 - 2a + 1$$

$$= 2a^2 - 2a + 1$$

$$P - Q = 3a^2 - 3a + 1 - 2a^2 + 2a - 1$$

$$= a^2 - a = a(a-1)$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a(a-1) < 0$

$\therefore P - Q < 0$ 이고 $P < Q$

49. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은? (a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
 $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)

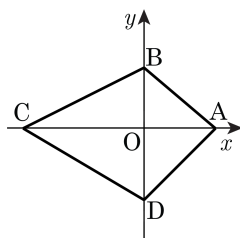
② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$
 $= a+b+2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (단 $a=b$ 일때 등호 성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$
 $\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a=b$)

④ (반례) $a=1$
 $1^2 - 1 > 1, 0 > 1$
 $\therefore$ 거짓

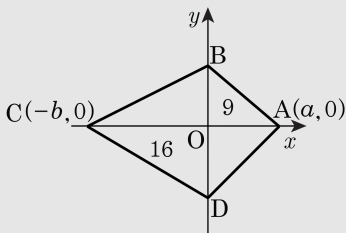
⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)
 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b=c$)
 $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c=a$)
 $\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$
 (등호 성립조건은 $a=b=c$)

50. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$