

1. 다음 포물선을 꼭이 좁은 것부터 차례로 기호로 나열한 것은?

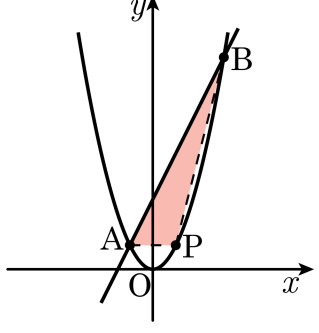
가) $y = -x^2$	나) $y = -5x^2$
다) $y = -\frac{1}{2}x^2$	라) $y = -\frac{5}{4}x^2$

- ① 가-나-다-라
- ② 나-라-가-다
- ③ 다-나-가-라
- ④ 나-가-라-다
- ⑤ 라-나-다-가

해설

$y = ax$ 에서 a 의 절댓값이 클수록 꼭이 좁아진다.

2. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B 까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표는?



- ① (1,1) ② (1,2) ③ (2,1) ④ (2,4) ⑤ (3,2)

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB와 직선 OP는 평행하므로
직선 OP의 기울기는 2이고 직선 OP는 $y = 2x$ 이다. 점 P는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점이므로
 $x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 2, y = 4$ 또는 $x = 0, y = 0$ (원점)
그런데 P는 원점이 아니므로 P(2, 4)이다.

3. 다음 보기 중 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프와 완전히 포개어 지는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $y = -(x-2)^2$

㉡ $y = 4x^2 + 3$

㉢ $y = -x^2 + 7$

㉣ $y = -2(x-1)^2$

㉤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

▶ 답 :

▶ 답 :

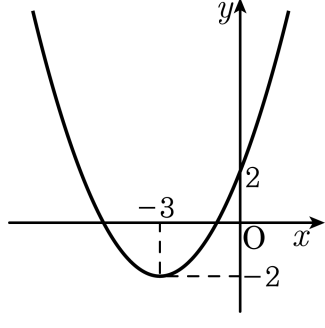
▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

이차항의 계수가 같은 이차함수를 찾는다.

4. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, -2)$ 이고 그래프 모양이 다음 그림과 같은 이차함수의 식을 $y = a(x + p)^2 + q$ 라고 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값은?



- ① -2 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{8}{3}$ ⑤ -3

해설

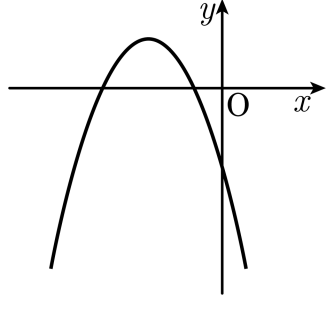
꼭짓점의 좌표가 $(-3, -2)$ 이고 y 절편이 2 이므로 다른 한 점 $(0, 2)$ 를 지난다.

$y = a(x + 3)^2 - 2$ 에 $(0, 2)$ 를 대입하면 $2 = 9a - 2$, $a = \frac{4}{9}$

이므로 $y = \frac{4}{9}(x + 3)^2 - 2$ 인 식이 된다.

따라서 $apq = \frac{4}{9} \times 3 \times (-2) = -\frac{8}{3}$ 이다.

6. 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 부호가 다른 하나는?



- ① a ② p ③ q
④ $ap^2 + q$ ⑤ aq

해설

- 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 가 위로 볼록하므로 $a < 0$ 이고,
꼭짓점 (p, q) 가 제 2 사분면에 있으므로 $p < 0, q > 0$ 이다.
① 그래프가 위로 볼록하므로 $a < 0$
② 꼭짓점 (p, q) 가 제 2 사분면에 있으므로 $p < 0$
③ 꼭짓점 (p, q) 가 제 2 사분면에 있으므로 $q > 0$
④ y 절편이 음수이므로 $x = 0$ 을 대입하면 $aq^2 + q < 0$
⑤ $aq < 0$

7. 이차함수 $y = (x+3)^2 - 9$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -9)$ 이다.
- ② 대칭축은 $x = -3$ 이다.
- ③ 그래프는 아래로 볼록한 모양이다.
- ④ x 축과 두 점에서 만난다.
- ⑤ 제 1, 2, 3, 4 사분면을 모두 지난다.

해설

⑤ 제 4 사분면을 지나지 않는다.

8. 이차함수 $y = 3x^2 + 6x - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 $y = 3x^2 - 12x + 2$ 의 그래프가 되었다. 이 때, pq 의 값은?

① 30

② -15

③ 10

④ -5

⑤ 45

해설

$$y = 3(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2 = 3(x + 1)^2 - 5$$

꼭짓점 $(-1, -5)$

$$y = 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = 3(x - 2)^2 - 10$$

꼭짓점 $(2, -10)$

따라서 $p = 3$, $q = -5$ 이므로

$pq = -15$ 이다.

9. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y = -(x-2)^2$

② $y = \frac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$

③ $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$

④ $y = -3x^2 + x$

⑤ $y = -\frac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

① 1

② 2

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ $\frac{5}{2}$

이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - 5x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라 할 때, 점 P 에서 점 Q 사이의 거리가 9 일 때, 이 포물선의 y 절편을 구하여라.

① -14 ② -7 ③ -1 ④ 4 ⑤ 45

해설

점 P 의 좌표 a 라 하면 Q 좌표는 $a + 9$

두 근의 합은 5

$$\therefore a + (a + 9) = 5, a = -2$$

$\therefore$ 두 점은 $(-2, 0), (7, 0)$

$$\text{두 근의 곱은 } k = (-2) \times 7 = -14$$

11. 다음 이차함수 중 그래프가 모든 사분면을 지나는 것을 모두 골라라.

㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2$

㉡ $y = -4x^2 + 8x$

㉢ $y = -2x^2 + 4$

㉣ $y = -x^2 - 2x - 2$

㉤ $y = -5x^2 - 4x + 1$

▶ 답 :

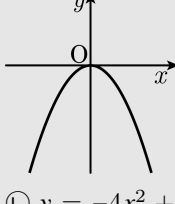
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

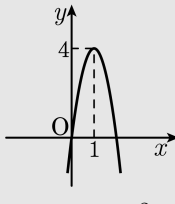
▷ 정답 : ㉤

해설

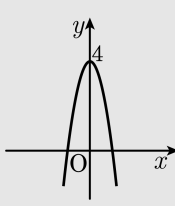
㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2$: 꼭짓점이 (0, 0) 이고, y 절편은 0 인 위로 볼록한 그래프로, 제3, 4 사분면을 지난다.



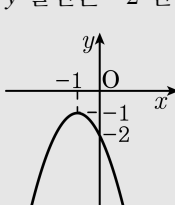
㉡ $y = -4x^2 + 8x = -4(x - 1)^2 + 4$: 꼭짓점이 (1, 4) 이고, y 절편은 0 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 3, 4 사분면을 지난다.



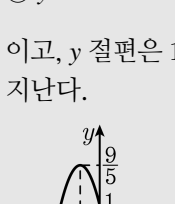
㉢ $y = -2x^2 + 4$: 꼭짓점이 (0, 4) 이고, y 절편은 4 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 2, 3, 4 사분면을 지난다.



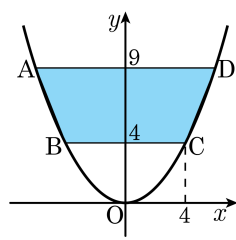
㉣ $y = -x^2 - 2x - 2 = -(x + 1)^2 - 1$: 꼭짓점이 (-1, -1) 이고, y 절편은 -2 인 위로 볼록한 그래프로, 제3, 4 사분면을 지난다.



㉤ $y = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}$: 꼭짓점이 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 이고, y 절편은 1 인 위로 볼록한 그래프로, 제1, 2, 3, 4 사분면을 지난다.



12. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 네 꼭짓점이 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프 위에 있는 사다리꼴이다. □ABCD 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$y = ax^2$ 에 점 $C(4, 4)$ 를 대입하면

$$4 = a \times 4^2$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$y = \frac{1}{4}x^2$ 에서 A, D 의 y 좌표가 9이므로

$$9 = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$\overline{AD} = 12$, $\overline{BC} = 8$ 이므로

$$\therefore (\text{□ABCD의 넓이}) = (12 + 8) \times 5 \times \frac{1}{2} = 50$$

13. $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 의 그래프가 x 축과 점 $(3, 0)$ 에서 만날 때, 이차함수의 최댓값은?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$(3, 0)$ 을 $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 에 대입하면

$$0 = -9 + 12 - a + 3$$

$$\therefore a = 6$$

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

$$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3$$

$$= -(x - 2)^2 + 1$$

$\therefore x = 2$ 일 때, 최댓값 1

14. 함수 $y = x^2 - q$, $y = -x^2 + q$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 21 일 때, q 의 값을 구하여라. (단, $q > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = 0$ 이므로 직사각형은 직선 $x = 0$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $-t, t$ 라 하면 가로 길이는 $2t$,

세로의 길이는 $(-t^2 + q) - (t^2 - q) = -2t^2 + 2q$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(-2t^2 + 2q + 2t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4q + 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4q + 1 = 21$ 이므로 $q = 5$ 이다.

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 45 ② 20 ③ -5 ④ -20 ⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+1)(x-5) \\ &= a(x^2 - 4x - 5) \\ &= a(x-2)^2 - 9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고

$b = 4, c = 5$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$$

16. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + kx + k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k$$

$$\text{최솟값 } m = -\frac{k^2}{4} + k$$

$$m = -\frac{k^2}{4} + k = -\frac{1}{4}(k-2)^2 + 1$$

$k = 2$ 일 때, m 은 최댓값 1 을 갖는다.

17. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

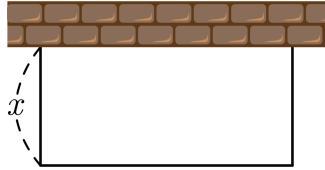
$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

18. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.

넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

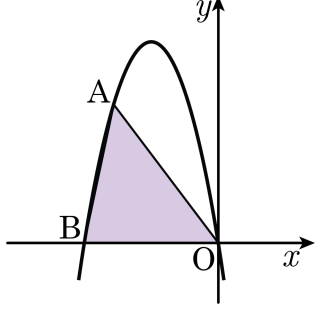


- ① 6m ② 8m ③ 10m ④ 12m ⑤ 14m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,
 $y = x(40 - 2x)$
 $= -2x^2 + 40x$
 $= -2(x - 10)^2 + 200$
 $x = 10$ 일 때, 최댓값은 200 이다.

19. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



- ① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.
 따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점 $(0, 0), (-6, 0)$ 을 지나므로,
 $0 = c, 0 = -36 - 6b$
 $b = -6, c = 0$
 $y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$
 $\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.
 즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로
 $\triangle OAB$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

20. 지상 40m 높이에서 $v\text{m/s}$ 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 $h\text{m}$ 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 85 m

해설

$$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$

이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.