

1. 다음은 $y = 3x^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 옳지 않은 것은?

- ① $y = -3x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ② 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
- ③ 점 $(-2, 3)$ 를 지난다.
- ④ 대칭축은 y 축이다.
- ⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소한다.

해설

③ 지나는 점을 직접 대입하면, $3 \neq 3 \times (-2)^2 = 12$

2. $y = -3(x-2)^2 + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 식의 x^2 의 계수는?

① 3 ② -3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -18

해설

그래프를 평행이동했을 때 이차항의 계수는 변하지 않는다.

3. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 하였을 때 꼭짓점의 좌표를 구하면?

- ① (0, 2) ② (0, -2) ③ (2, 0)
④ (-2, 0) ⑤ (0, 0)

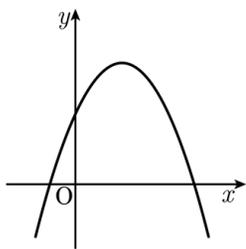
해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 함수의 식은

$$y = a(x-2)^2$$

꼭짓점의 좌표 : (2, 0)

4. 다음 이차함수 $y = a(x + p)^2 + q$ 의 그래프에서 다음 \square 에 알맞은 부등호를 써넣어라.



$apq \square 0$

▶ 답:

▷ 정답: >

해설

위로 볼록하므로 $a < 0$, 꼭짓점 $(-p, q)$ 가 제1 사분면에 있으므로 $p < 0, q > 0$ 이다.
따라서 $apq > 0$ 이다.

5. 다음 중 꼭짓점의 좌표 $(2, -6)$, 대칭축의 방정식 $x = 2$, y 축과의 교점의 좌표 $(0, -10)$ 인 이차함수는?

① $y = x^2 - 2x - 3$

② $y = x^2 - 4x + 5$

③ $y = -x^2 - 2x + 3$

④ $y = -x^2 + 4x - 10$

⑤ $y = 2x^2 - 4x + 5$

해설

$y = a(x - 2)^2 - 6$ 에 $(0, -10)$ 을 대입한다.

$$a = -1$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x - 10$$

6. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4\end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

7. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이고, y 절편이 6 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, 4)$ 이므로

$y = a(x+1)^2 + 4$ 이고, y 절편이 6 이므로

$6 = a(0+1)^2 + 4$, $a = 2$ 이다.

$y = 2(x+1)^2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$

$a = 2, b = 4, c = 6$

$\therefore a + b + c = 12$

8. 포물선 $y = ax^2 + 10x - 12$ 과 x 축이 두 점 $A(1,0), B(b,0)$ 에서 만날 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = ax^2 + 10x - 12$ 에 $A(1,0)$ 을 대입하면

$0 = a + 10 - 12$, $a = 2$ 이다.

$y = 2x^2 + 10x - 12$ 이므로

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$x = 1$ 또는 $x = -6$ 이다.

$b = -6$ 즉, $B(-6, 0)$

$$\therefore a + b = -4$$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -10)$ 이다.

$$y = x^2 + 2ax + b$$

$$= (x-3)^2 - 10$$

$$= x^2 - 6x - 1$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

10. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 (2, 4) 이다.
 $y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
 $a = 4, b = 8$
 $\therefore a + b = 12$

11. 이차함수 $y = -2x^2 + 2ax$ 의 최댓값이 8일 때, 상수 a 의 값을 구하면?
(단, $a > 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 2ax \\ &= -2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

최댓값이 8 이므로 $\frac{a^2}{2} = 8$ 이다.
 $a > 0$ 이므로 $a = 4$ 이다.

12. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $b = 8$

▷ 정답: $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 (2, 5) 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2 + 5$ 이다.

$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

13. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$$

$$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

14. 차가 10 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소일 때, 두 수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -5

▷ 정답: 5

해설

두 수를 x , $x + 10$ 이라고 하면

$$y = x(x + 10) = x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$$

$x = -5$ 일 때, 최솟값 -25 를 가진다.

따라서 두 수는 -5 , 5 이다.

15. 가로 길이가 5cm, 세로 길이가 9cm 인 직사각형의 가로 길이를 x cm 만큼 늘리고, 세로 길이를 x cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 2.5 ④ 3 ⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2 + 4x + 45 \\ &= -(x-2)^2 + 49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

16. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

- ㉠ $\frac{15}{2}$ m ㉡ 8m ㉢ $\frac{17}{2}$ m ㉣ 3m ㉤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\text{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\text{m}$ 라 하면

$$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}\text{m}$ 일

때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}\text{m}^2$ 을 가진다.

17. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k, 4)$ 를 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -5

해설

이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ 이다. 점 $(k, 4)$ 를 지나므로 대입하면 $4 = \frac{1}{4}(k+1)^2$, $16 = (k+1)^2$, $k+1 = \pm 4$ 따라서 $k = 3, -5$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $p + q = -1$

해설

평행이동한 그래프의 식을

$y = x^2 + bx + c$ 라고 하자.

$y = x^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지나므로

$$-4 = 9 + 3b + c, \quad 11 = c$$

$$3b = -24 \quad \therefore b = -8$$

$$y = x^2 - 8x + 11 = (x - 4)^2 - 5$$

$$y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$ 에서 $(4, -5)$ 로 이동하였으므로 $p = 2$, $q = -3$ 이다.

$$\therefore p + q = 2 - 3 = -1$$

19. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 점 $(-5, -7)$ 일 때, 이 함수의 그래프가 제4 사분면을 지나지 않기 위해서 a 값이 가질 수 있는 범위는?

① $a \leq -\frac{3}{4}$
④ $a \leq \frac{7}{25}$

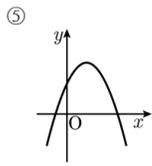
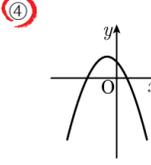
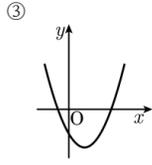
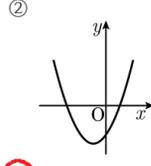
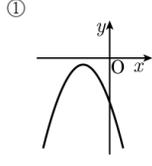
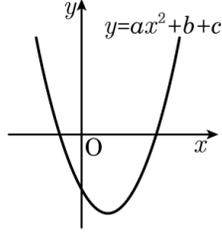
② $a \geq -\frac{3}{4}$
⑤ $0 < a \leq \frac{7}{5}$

③ $a \geq \frac{7}{25}$

해설

$$\begin{aligned} y &= a(x+5)^2 - 7 = ax^2 + 10ax - 7 + 25a \\ (y\text{절편}) &\geq 0 \\ -7 + 25a &\geq 0 \\ \therefore a &\geq \frac{7}{25} \end{aligned}$$

20. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프의 모양은 어느 것인가?



해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편 $c < 0$

따라서 $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 x

좌표 $-\frac{b}{2c} < 0$, y 절편 $a > 0$ 인 포물선이다.

21. 세 점 $(-1, -5)$, $(0, 5)$, $(2, 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q) 일 때, $p - q$ 의 값은?

- ① 1 ② 5 ③ -5 ④ -1 ⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 놓으면
 $(-1, -5)$ 를 지나므로 $-5 = a - b + 5$
 $(0, 5)$ 를 지나므로 $5 = c$
 $(2, 13)$ 을 지나므로 $13 = 4a + 2b + 5$
 $\therefore a = -2, b = 8, c = 5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
 $y = -2x^2 + 8x + 5 = -2(x - 2)^2 + 13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$ 이므로
 $p - q = -11$ 이다.

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2 - 2x - 8) \\ &= a(x-1)^2 - 9a\end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$b = 2, c = 8$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$$

23. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

- ㉠ $-\frac{7}{8}$ ㉡ -1 ㉢ $\frac{1}{8}$ ㉣ 1 ㉤ $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \text{ 이므로 } m \text{ 의 최댓값은 } -\frac{7}{8}$$

이다.

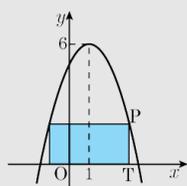
24. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{둘레의 길이} &= 2[2(t - 1) - t^2 + 2t + 5] \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t - 2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

25. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

- ① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned}h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\ &= -5(t - 3)^2 + 67\end{aligned}$$

$$t = 3 \text{ 일 때, 최댓값 } h = 67$$

26. 점 (2, 10)을 지나고 꼭짓점의 좌표가 (-1, -8)인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 (-1, -8)인 이차함수의 방정식은 $y = a(x+1)^2 - 8$ 이고 점 (2, 10)을 지나므로 $10 = a(2+1)^2 - 8$
 $\therefore a = 2$
따라서 이차함수의 그래프는 $y = 2(x+1)^2 - 8$
이 포물선과 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 (-1, 2) 이므로 $y = -2(x+1)^2 + 2$
이 그래프의 x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 의 값이므로 $-2x^2 - 4x = 0$
 $\therefore x = 0, -2$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 4$

28. 이차함수 $y = 2x^2 + 4px - 3p^2 + p + 4$ 의 그래프의 꼭짓점이 제2 사분면 위에 있을 때, p 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $0 < p < 1$

해설

$$y = 2(x^2 + 2px) - 3p^2 + p + 4 \\ = 2(x + p)^2 - 5p^2 + p + 4 \text{ 이므로}$$

꼭짓점은 $(-p, -5p^2 + p + 4)$

이때, 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있으므로

$$-p < 0 \quad \therefore p > 0$$

$$-5p^2 + p + 4 > 0, (5p + 4)(p - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{5} < p < 1$$

따라서 $0 < p < 1$ 이다.

29. 이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 A(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a, 4a^2)$ 이라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a, 4a^2)$

이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\Delta PQA = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 P와 점 Q의 y 좌표값은 16이다.

30. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖고, 그 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a, b, p 의 합 $a+b+p$ 의 값을 구하면? (단, $p < 0$)

- ① 12 ② 0 ③ -18 ④ 42 ⑤ -14

해설

$$y = 2(x+p)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1+p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2 + 2p + 1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$$p^2 + 4p = 0, p(p+4) = 0, p = 0, -4$$

$$\therefore p = -4 (\because p < 0)$$

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$$a = 16, b = -30$$

$$\therefore a + b + p = 16 + (-30) + (-4) = -18$$