

1. 다음은 $y = 3x^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 옳지 않은 것은?

① $y = -3x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

③ 점 $(-2, 3)$ 를 지난다.

④ 대칭축은 y 축이다.

⑤ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값은 감소한다.

해설

③ 지나는 점을 직접 대입하면, $3 \neq 3 \times (-2)^2 = 12$

2. $y = -3(x - 2)^2 + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 식의 x^2 의 계수는?

① 3

② -3

③ 6

④ -6

⑤ -18

해설

그래프를 평행이동했을 때 이차항의 계수는 변하지 않는다.

3. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 하였을 때 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(0, 2)$

② $(0, -2)$

③ $(2, 0)$

④ $(-2, 0)$

⑤ $(0, 0)$

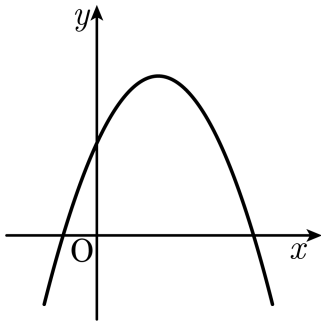
해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 함수의 식은

$$y = a(x - 2)^2$$

꼭짓점의 좌표 : $(2, 0)$

4. 다음 이차함수 $y = a(x + p)^2 + q$ 의 그래프에서 다음 $\square$ 에 알맞은 부등호를 써넣어라.



$$apq \square 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : >

해설

위로 볼록하므로 $a < 0$, 꼭짓점 $(-p, q)$ 가 제1 사분면에 있으므로 $p < 0, q > 0$ 이다.
따라서 $apq > 0$ 이다.

5. 다음 중 꼭짓점의 좌표 $(2, -6)$, 대칭축의 방정식 $x = 2$, y 축과의 교점의 좌표 $(0, -10)$ 인 이차함수는?

① $y = x^2 - 2x - 3$

② $y = x^2 - 4x + 5$

③ $y = -x^2 - 2x + 3$

④ $y = -x^2 + 4x - 10$

⑤ $y = 2x^2 - 4x + 5$

해설

$y = a(x - 2)^2 - 6$ 에 $(0, -10)$ 을 대입한다.

$$a = -1$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x - 10$$

6. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}y &= -(x-1)(x+3) \\&= -x^2 - 2x + 3 \\&= -(x+1)^2 + 4\end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

7. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이고, y 절편이 6 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, 4)$ 이므로

$y = a(x + 1)^2 + 4$ 이고, y 절편이 6 이므로

$6 = a(0 + 1)^2 + 4$, $a = 2$ 이다.

$$y = 2(x + 1)^2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$$

$$a = 2, b = 4, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12$$

8. 포물선 $y = ax^2 + 10x - 12$ 과 x 축이 두 점 A(1, 0), B(b, 0) 에서 만날 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$y = ax^2 + 10x - 12$ 에 A(1, 0) 을 대입하면

$0 = a + 10 - 12$, $a = 2$ 이다.

$y = 2x^2 + 10x - 12$ 이므로

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$x = 1$ 또는 $x = -6$ 이다.

$b = -6$ 즉, B(-6, 0)

$$\therefore a + b = -4$$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -10)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + b \\ &= (x - 3)^2 - 10 \\ &= x^2 - 6x - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

10. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 (2, 4) 이다.

$$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

$$a = 4, b = 8$$

$$\therefore a + b = 12$$

11. 이차함수 $y = -2x^2 + 2ax$ 의 최댓값이 8일 때, 상수 a 의 값을 구하면?
(단, $a > 0$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = -2x^2 + 2ax$$

$$= -2 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

최댓값이 8 이므로 $\frac{a^2}{2} = 8$ 이다.

$a > 0$ 이므로 $a = 4$ 이다.

12. 이차함수 $y = -2x^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = 8$

▷ 정답 : $c = -3$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$ 이므로 이차함수의 식은 $y = -2(x-2)^2 + 5$ 이다.

$y = -2(x-2)^2 + 5$ 을 전개하면 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 이므로 $b = 8, c = -3$ 이다.

13. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$$

$$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

14. 차가 10 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소일 때, 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

▷ 정답 : 5

해설

두 수를 x , $x + 10$ 이라고 하면

$$y = x(x + 10) = x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$$

$x = -5$ 일 때, 최솟값 -25 를 가진다.

따라서 두 수는 -5 , 5 이다.

15. 가로 길이가 5cm, 세로 길이가 9cm 인 직사각형의 가로 길이를 x cm 만큼 늘이고, 세로 길이를 x cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 2.5

④ 3

⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2 + 4x + 45 \\ &= -(x-2)^2 + 49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

16. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$ m

② 8m

③ $\frac{17}{2}$ m

④ 3m

⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y \text{ m}^2$, 반지름의 길이를 $x \text{ m}$ 라 하면

$$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2} \text{ m}$ 일

때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4} \text{ m}^2$ 을 가진다.

17. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k, 4)$ 를 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -5

해설

이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ 이다. 점 $(k, 4)$ 를 지나므로 대입하면 $4 = \frac{1}{4}(k+1)^2$, $16 = (k+1)^2$, $k+1 = \pm 4$ 따라서 $k = 3, -5$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $p + q = -1$

해설

평행이동한 그래프의 식을

$y = x^2 + bx + c$ 라고 하자.

$y = x^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지나므로

$$-4 = 9 + 3b + c, \quad 11 = c$$

$$3b = -24 \quad \therefore b = -8$$

$$y = x^2 - 8x + 11 = (x - 4)^2 - 5$$

$$y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$ 에서 $(4, -5)$ 로 이동하였으므로 $p = 2$, $q = -3$ 이다.

$$\therefore p + q = 2 - 3 = -1$$

19. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 점 $(-5, -7)$ 일 때, 이 함수의 그래프가 제4 사분면을 지나지 않기 위해서 a 값이 가질 수 있는 범위는?

① $a \leq -\frac{3}{4}$

② $a \geq -\frac{3}{4}$

③ $a \geq \frac{7}{25}$

④ $a \leq \frac{7}{25}$

⑤ $0 < a \leq \frac{7}{5}$

해설

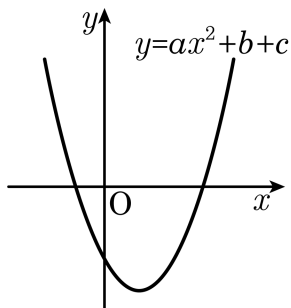
$$y = a(x + 5)^2 - 7 = ax^2 + 10ax - 7 + 25a$$

$$(y\text{절편}) \geq 0$$

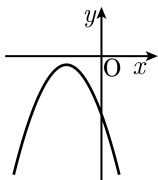
$$-7 + 25a \geq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{7}{25}$$

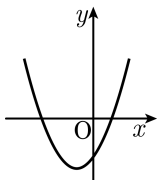
20. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프의 모양은 어느 것인가?



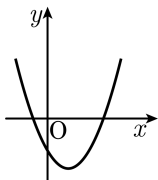
①



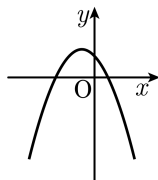
②



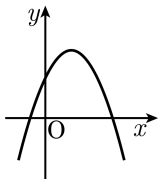
③



④



⑤



해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편 $c < 0$

따라서 $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2c} < 0$, y 절편 $a > 0$ 인 포물선이다.

21. 세 점 $(-1, -5)$, $(0, 5)$, $(2, 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q) 일 때, $p - q$ 의 값은?

① 1

② 5

③ -5

④ -1

⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 놓으면

$(-1, -5)$ 를 지나므로 $-5 = a - b + c$

$(0, 5)$ 를 지나므로 $5 = c$

$(2, 13)$ 을 지나므로 $13 = 4a + 2b + c$

$\therefore a = -2, b = 8, c = 5$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y = -2x^2 + 8x + 5 = -2(x - 2)^2 + 13$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$ 이므로

$p - q = -11$ 이다.

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10

② -12

③ -14

④ -16

⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\&= a(x+2)(x-4) \\&= a(x^2 - 2x - 8) \\&= a(x-1)^2 - 9a\end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$$b = 2, c = 8 \text{ 이다.}$$

$$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$$

23. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$

② -1

③ $\frac{1}{8}$

④ 1

⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

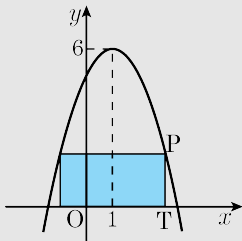
24. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

둘레의 길이 $= 2[2(t - 1) - t^2 + 2t + 5]$

$$= 2(-t^2 + 4t + 3)$$

$$= -2t^2 + 8t + 6$$

$$= -2(t - 2)^2 + 14$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

25. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초

② 2 초

③ 3 초

④ 4 초

⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned}h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\&= -5(t - 3)^2 + 67\end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

26. 점 $(2, 10)$ 을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-1, -8)$ 인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, -8)$ 인 이차함수의 방정식은 $y = a(x+1)^2 - 8$ 이고 점 $(2, 10)$ 을 지나므로

$$10 = a(2+1)^2 - 8$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 이차함수의 그래프는 $y = 2(x+1)^2 - 8$

이 포물선과 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$ 이므로

$$y = -2(x+1)^2 + 2$$

이 그래프의 x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 의 값이므로

$$-2x^2 - 4x = 0$$

$$\therefore x = 0, -2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 4$$

27. 두 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 + 20$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, 순서쌍의 개수를 구하여라. (단, x, y 는 자연수이다.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 56 개

해설

두 그래프의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 20$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{80}{3}}$$

이때 두 그래프로 둘러싸인 영역의 x 좌표의 범위가 $-\sqrt{\frac{80}{3}} <$

$x < \sqrt{\frac{80}{3}}$ 이고,

y 좌표의 범위는 $\frac{1}{2}x^2 < y < -\frac{1}{4}x^2 + 20$

자연수인 x 좌표는 1, 2, 3, 4, 5

(1) $x = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} < y < \frac{79}{4}$ 이므로 $y = 1, 2, \dots, 19 \Rightarrow 19$ 쌍

(2) $x = 2$ 일 때, $2 < y < 19$ 이므로 $y = 3, 4, \dots, 17, 18 \Rightarrow 16$ 쌍

(3) $x = 3$ 일 때, $\frac{9}{2} < y < \frac{71}{4}$ 이므로 $y = 5, 6, \dots, 16, 17 \Rightarrow 13$ 쌍

(4) $x = 4$ 일 때, $8 < y < 16$ 이므로 $y = 9, 10, \dots, 14, 15 \Rightarrow 7$ 쌍

(5) $x = 5$ 일 때, $\frac{25}{2} < y < \frac{55}{4}$ 이므로 $y = 13 \Rightarrow 1$ 쌍

따라서 순서쌍 (x, y) 의 개수는 $19 + 16 + 13 + 7 + 1 = 56$ (개)이다.

28. 이차함수 $y = 2x^2 + 4px - 3p^2 + p + 4$ 의 그래프의 꼭짓점이 제2사분면 위에 있을 때, p 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $0 < p < 1$

해설

$$y = 2(x^2 + 2px) - 3p^2 + p + 4$$

$$= 2(x + p)^2 - 5p^2 + p + 4 \text{ 이므로}$$

$$\text{꼭짓점은 } (-p, -5p^2 + p + 4)$$

이때, 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있으므로

$$-p < 0 \quad \therefore p > 0$$

$$-5p^2 + p + 4 > 0, (5p + 4)(p - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{5} < p < 1$$

따라서 $0 < p < 1$ 이다.

29. 이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y 값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 $A(3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a, 4a^2)$ 이라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a, 4a^2)$ 이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\triangle PQA = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 P와 점 Q의 y 좌표값은 16이다.

30. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖고, 그 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a, b, p 의 합 $a + b + p$ 의 값을 구하면? (단, $p < 0$)

① 12

② 0

③ -18

④ 42

⑤ -14

해설

$$y = 2(x + p)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1 + p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2 + 2p + 1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$$p^2 + 4p = 0, p(p + 4) = 0, p = 0, -4$$

$$\therefore p = -4 (\because p < 0)$$

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$$a = 16, b = -30$$

$$\therefore a + b + p = 16 + (-30) + (-4) = -18$$