

1. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

2. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로
 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

3. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

4. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

5. $x > 2$ 일 때 $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$x-2=t$ 로 놓으면 $t>0$ 이고 $x=t+2$

따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\&= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\&\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\&= 12\end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립)

6. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

7. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

8. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

9. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$ 이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{13}$

10. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x - y + 4z)^2$
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

11. m 이 실수 일 때, $2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 \geq k$ 를 만족하는 k 의 최댓값을 구하시오.
(단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m 이 실수이고, $m \neq 0$ 이므로 $m^2 > 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서, } 2m^2 + \frac{8}{m^2} - 2 &\geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{8}{m^2}} - 2 \\ &= 2\sqrt{16} - 2 = 8 - 2 = 6\end{aligned}$$

12. 0이 아닌 실수 a 에 대하여 $(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a})$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$(6a + \frac{1}{a})(24a + \frac{1}{a}) = 144a^2 + \frac{1}{a^2} + 30 \geq 2\sqrt{144a^2 \times \frac{1}{a^2}} + 30 = 30 + 24 = 54$$

13. $x > 2$ 일 때, $x - 2 + \frac{4}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 0

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

산술 기하평균의 관계에서

$$(x-2) + \frac{4}{(x-2)} \geq 2\sqrt{(x-2)\frac{4}{(x-2)}}$$

$$= 2\sqrt{4} = 4$$

$\therefore$ 최솟값 : 4

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 를 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z$ 의 최대값을 구하면?

① 14 ② 17 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$
 $14 \cdot 2 \geq (x + 2y + 3z)^2$
 $-2\sqrt{7} \leq x + 2y + 3z \leq 2\sqrt{7}$
 $\therefore$ 구하는 최대값은 $2\sqrt{7}$

15. a, b, x, y 가 실수이고 $a^2 + b^2 = 2, x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
즉, $(ax + by)^2 \leq 2 \times 8$
한편, $ax + by = X$ 라 하면, $X^2 \leq 16$
 $\therefore -4 \leq X \leq 4$
따라서, $M = 4, m = -4$
 $\therefore M + m = 0$

16. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고 $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2)$
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$
 $\leq 14(a + b + c) = 14^2$
 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로
 $\therefore 0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

17. 실수 x, y 에 대하여 $3x + 4y = 5$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$
 $25(x^2 + y^2) \geq 25$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq 1$

해설

$3x + 4y = 5$ 에서
 $y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$
 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{16}(3x - 5)^2$
 $= x^2 + \frac{1}{16}(9x^2 - 30x + 25)$
 $= \frac{25}{16}x^2 - \frac{30}{16}x + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 1$

18. $x > 0, y > 0, z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\}(1 + 4 + 9)$
 $\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
 $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$
 $\therefore 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
($\because x > 0, y > 0, z > 0$)
 $\therefore \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은
 $2\sqrt{35}$

19. $a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $ax + by$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \leq ax + by \leq 4$

② $-9 \leq ax + by \leq 9$

③ $-6 \leq ax + by \leq 6$

④ $0 \leq ax + by \leq 36$

⑤ $-36 \leq ax + by \leq 36$

해설

$a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 이면
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에서
 $4 \cdot 9 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -6 \leq ax + by \leq 6$

20. 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$ 가 성립할 때, 실수 d 의 최솟값 m 과 최댓값 M 의 합 $m+M$ 의 값은?

- ① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$
 $a+b+c=8-d, a^2+b^2+c^2=124-d^2$
코시-슈바르츠 부등식에서
 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로
 $3(124-d^2) \geq (8-d)^2$
 $372-3d^2 \geq d^2-16d+64$
 $4d^2-16d+64-372 \leq 0$
 $4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$
 $\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$
 $\therefore -7 \leq d \leq 11$
따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$
이므로 $m+M=-7+11=4$

21. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때
 $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{a}{c} > 0$$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{1 \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1 + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad 1 + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}} = 8$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 8$$

따라서 최솟값은 8

22. $x > -1$ 일 때 $x + \frac{1}{x+1}$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 k 라 할 때 $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$ 이므로 등호는 $x = 0$ 일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$

23. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

24. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ (k 는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \frac{1}{k-1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\frac{D}{4} = 1 - k < 0 \text{ 이므로 } k - 1 > 0$$

$$f(k) = 2 + (k - 1) + \frac{1}{k - 1} \\ \geq 2 + 2\sqrt{(k - 1)\frac{1}{k - 1}} = 4$$

따라서 $f(k)$ 의 최솟값은 4이다.

25. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

26. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} : (가)$$
$$\left(\because x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}}, : (나)\right)$$
$$\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \times 8y} : (다)$$

따라서 최솟값은 $4\sqrt{2} : (라)$

- ① (가), $4\sqrt{2} + 3$ ② (나), $2 + 2\sqrt{2}$ ③ (다), $3 + 2\sqrt{2}$
- ④ (라), $4 + 3\sqrt{2}$ ⑤ (가), $3 + 2\sqrt{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 일 때

i) $x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x = \frac{1}{4y}$, 즉 $xy = \frac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ii) $\frac{1}{x} + 8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 8y} = 4\sqrt{\frac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\frac{1}{x} = 8y$, 즉 $xy = \frac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

i), ii)에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

iii) $\left(x + \frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x} + 8y\right)$

$$= 3 + \frac{1}{4xy} + 8xy \geq 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4xy} \cdot 8xy}$$
$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ 최솟값은 $3 + 2\sqrt{2}$

27. 다음은 양수 x, y, z 가 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때, $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x = y = z =$ (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ① $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$
- ② $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ③ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$
- ④ $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ⑤ $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x = y = z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 이므로 $x = y = z$ 이면 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

28. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$ A(3, 2)

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

29. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

- I. $a + b + c \geq 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

- ① I, II ② I, III ③ III, IV
④ I, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$ 이므로
I. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$
 $= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
 $\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

30. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
 $(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2$ ㉠ 0
이것을 t 에 관하여 정리하면
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t$
 $+ (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉡ 0
따라서 항상 성립하기 위해서는
 $(ax + by + cz + dw)^2 -$
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉢ 0..... (이하 생략)

- ① >, < ② ≥, < ③ ≤, > ④ ≤, ≥ ⑤ ≥, ≤

해설

생략