1. $a > 0,\ b > 0$일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16　　② 17　　③ 18　　④ 19　　⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

2. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

3. $x > 0, y > 0$일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20 + 3 \times 4 = 32$

4. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$$\therefore\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$$

5. $x > 2$일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고 $x = t + 2$
따라서 주어진 식을 t로 나타낸 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

6. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\frac{9}{4}$

해설

$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

7. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

8. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

9. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

10. 실수 x, y, z에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

x, y, z가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1+(-1)^2+4^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

11. m이 실수 일 때, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하시오. (단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m이 실수이고, $m \neq 0$이므로 $m^2 > 0$이다.

따라서, $2m^2+\dfrac{8}{m^2}-2 \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \dfrac{8}{m^2}}-2$

$$= 2\sqrt{16}-2 = 8-2 = 6$$

12. 0이 아닌 실수 a에 대하여 $(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a})$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a}) = 144a^2+\frac{1}{a^2}+30 \geq 2\sqrt{144a^2\times\frac{1}{a^2}}+30 =$

$30+24=54$

13. $x > 2$ 일 때, $x-2+\dfrac{4}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 0　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

산술 기하평균의 관계에서

$$(x-2)+\frac{4}{(x-2)} \geq 2\sqrt{(x-2)\frac{4}{(x-2)}}$$

$$=2\sqrt{4}=4$$

∴ 최솟값 : 4

14. $x^2+y^2+z^2=2$를 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z$의 최대값을 구하면?

① 14 ② 17 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (x+2y+3z)^2$

$14 \cdot 2 \geq (x+2y+3z)^2$

$-2\sqrt{7} \leq x+2y+3z \leq 2\sqrt{7}$

$\therefore$ 구하는 최대값은 $2\sqrt{7}$

15. a, b, x, y가 실수이고 $a^2+b^2=2$, $x^2+y^2=8$일 때, $ax+by$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
즉, $(ax+by)^2 \leq 2\times 8$
한편, $ax+by=X$라 하면, $X^2 \leq 16$
$\therefore -4 \leq X \leq 4$
따라서, $M=4$, $m=-4$
$\therefore M+m=0$

16. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고 $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$\leq 14(a+b+c)=14^2$

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이므로

$\therefore\ 0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

17. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$$y=\frac{1}{4}(5-3x)$$

$$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$$

$$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$$

18. $x>0,\ y>0,\ z>0$이고 $x+y+z=10$일 때, $\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}$의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2\}(1+4+9)$
$\geq(\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z})^2$이므로
$(\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z})^2\leq 140$

$\therefore\ 0<\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}\leq\sqrt{140}=2\sqrt{35}$
$(\because x>0,\ y>0,\ z>0)$
$\therefore\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}$의 최댓값은

$2\sqrt{35}$

19. $a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$일 때, $ax+by$가 취하는 값의 범위를 구하면?

① $-4 \le ax+by \le 4$
② $-9 \le ax+by \le 9$
③ $-6 \le ax+by \le 6$
④ $0 \le ax+by \le 36$
⑤ $-36 \le ax+by \le 36$

해설

$a^2+b^2=4,\ x^2+y^2=9$이면

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$에서

$4 \cdot 9 \ge (ax+by)^2$

$\therefore -6 \le ax+by \le 6$

20. 네 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$가 성립할 때, 실수 d의 최솟값 m과 최댓값 M의 합 $m+M$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8,\ a^2+b^2+c^2+d^2=124$

$a+b+c=8-d,\ a^2+b^2+c^2=124-d^2$

코시-슈바르츠 부등식에서

$(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$이므로

$3(124-d^2) \geq (8-d)^2$

$372-3d^2 \geq d^2-16d+64$

$4d^2-16d+64-372 \leq 0$

$4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$

$\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$

$\therefore -7 \leq d \leq 11$

따라서 최솟값 $m=-7$, 최댓값 $M=11$

이므로 $m+M=-7+11=4$

21. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때
$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$

$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$

따라서 최솟값은 8

22. $x > -1$일 때 $x + \dfrac{1}{x+1}$의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 k라 할 때 $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+1 > 0$이므로 $x + \dfrac{1}{x+1} = x+1+\dfrac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\dfrac{1}{x+1}} - 1 = 1$

$\therefore m = 1$

이 때 등호는

$x+1 = \dfrac{1}{x+1}$에서 $x = 0, -2$

$x > -1$이므로 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다.

$\therefore\ k = 0$

$\therefore\ m+k = 1$

23. $x > 2$ 일 때, $x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$에서 $x - 2 > 0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

24. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$(k는 실수)이 허근을 가질 때, $f(k) = k + 1 + \dfrac{1}{k-1}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\dfrac{D}{4} = 1 - k < 0$이므로 $k - 1 > 0$

$$f(k) = 2 + (k-1) + \frac{1}{k-1}$$

$$\geq 2 + 2\sqrt{(k-1)\frac{1}{k-1}} = 4$$

따라서 $f(k)$의 최솟값은 4이다.

25. $x > 2$일 때, $2x-3+\dfrac{1}{x-2}$의 최솟값을 a, 그 때의 x의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① $5+\sqrt{2}$　　② $5+2\sqrt{2}$　　③ $5+3\sqrt{2}$

④ $5+4\sqrt{2}$　　⑤ $5+6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$2x-3+\frac{1}{x-2}=2(x-2)+\frac{1}{x-2}+1$$

$$\geq 2\sqrt{2(x-2)\times\frac{1}{x-2}}+1$$

$$\geq 2\sqrt{2}+1$$

$\therefore a=2\sqrt{2}+1$

$2(x-2)=\dfrac{1}{x-2}$에서

$2(x-2)^2=1,\ (x-2)^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x>2$ 이므로 $b=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a+2b=2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+4=5+3\sqrt{2}$

26. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)$ 의 최솟값을 다음과 같이 구하였다. 이 과정에서 최초로 잘못된 부분과 옳은 답을 구하면?

$$\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} \times 2\sqrt{\frac{8y}{x}} \ :\ (가)$$
$$\left(\because\ \ x+\frac{1}{4y}\,\frac{\geq}{2}\sqrt{x\times\frac{1}{4y}},\ :\ (나)\right.$$
$$\left.\frac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\times 8y}\right)\ :\ (다)$$
따라서 최솟값은 $4\sqrt{2}$: (라)

① (가) , $4\sqrt{2}+3$　② (나) , $2+2\sqrt{2}$　③ (다) , $3+2\sqrt{2}$
④ (라) , $4+3\sqrt{2}$　⑤ (가) , $3+2\sqrt{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 일 때

ⅰ) $x+\frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

이 때, 등호는 $x=\frac{1}{4y}$, 즉 $xy=\frac{1}{4}$ 일 때 성립한다.

ⅱ) $\frac{1}{x}+8y \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 8y} = 4\sqrt{\frac{2y}{x}}$

이 때, 등호는 $\frac{1}{x}=8y$, 즉 $xy=\frac{1}{8}$ 일 때 성립한다.

ⅰ), ⅱ) 에서 등호가 성립하는 조건이 다르므로 (가)와 같이 나타낼 수 없다.

ⅲ) $\left(x+\frac{1}{4y}\right)\left(\frac{1}{x}+8y\right)$

$= 3+\frac{1}{4xy}+8xy \geq 3+2\sqrt{\frac{1}{4xy}\cdot 8xy}$

$= 3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ 최솟값은 $3+2\sqrt{2}$

27. 다음은 양수 $x,\ y,\ z$가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$
> $=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$
> $\therefore P^2\geq$ (가)
> 따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
> 등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$　② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$

$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$

$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore\ P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because\ x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

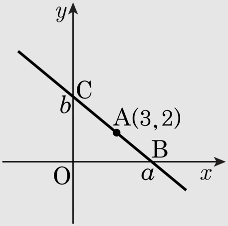
28. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, △OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

△OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$　$\therefore S\geq 12$

따라서 △OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

29. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3\times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2\times b^2\times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab\times bc\times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

30. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ $\boxed{㉠}$ 0
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉠}$ 0
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉡}$ $0\cdots\cdots$(이하 생략)

① $>$, $<$ ② $\geq$, $<$ ③ $\leq$, $>$ ④ $\leq$, $\geq$ ⑤ $\geq$, $\leq$

해설

생략