1. $a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=4$일 때 $a+b+\sqrt{2}c$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$\left\{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2\right\}(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+\sqrt{2}c)^2$

$\therefore\ (a+b+\sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$

$\therefore\ -4 \leq a+b+\sqrt{2}c \leq 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$\therefore\ M=4,\ m=-4$

$M-m=8$

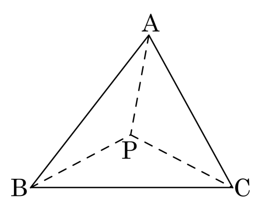
2. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=1$이고 $x^2+y^2=2$이 성립할 때, $ax+by$의 최댓값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$에 주어진 값
$a^2+b^2=1$, $x^2+y^2=2$을 대입하면
$1 \times 2 \geq (ax+by)^2$이다.
따라서 $-\sqrt{2} \leq ax+by \leq \sqrt{2}$
$\therefore ax+by$의 최댓값은
$\sqrt{2}$이다.

3. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $\mathrm{S}_1^2+\mathrm{S}_2^2+\mathrm{S}_3^2$의 최솟값은?



① $\dfrac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1+S_2+S_3=a$

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\geq(S_1+S_2+S_3)^2=a^2$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2\geq\dfrac{a^2}{3}$

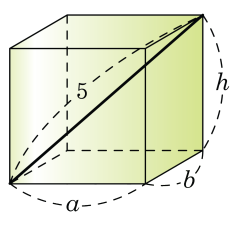
4. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$이라 하면
$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로
$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$
$\therefore 24 = \frac{1}{2}\times x_1 \times 6 + \frac{1}{2}\times x_2 \times 8 + \frac{1}{2}\times x_3 \times 10$이므로
$3x_1+4x_2+5x_3=24$
코시-슈바르츠 부등식에서
$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2) \ge (3x_1+4x_2+5x_3)^2$
$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2) \ge 576$
$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \ge \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

5. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

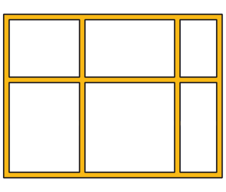
$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

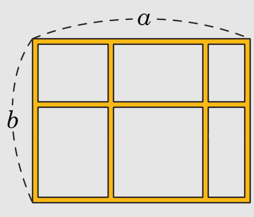
: $20\sqrt{3}$

6. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$
④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because\ 3a + 4b = 240)$

$\therefore\ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240$,

$\therefore\ a = 40$

7. $x > 0,\ y > 0$일 때, $(3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)$

$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$

$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$

$= 13 + 12 = 25$

$\therefore (3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 25$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25이다.

8. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$