

1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.



답:

2. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$ 의 최솟값을 구하여라.



답:

3. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

4. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.



답: _____

5. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

6. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$ 라

할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$

② $A \geq H \geq G$

③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$

⑤ $H \geq A \geq G$

7. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

$$\textcircled{1} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$$

8. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned}
 & [가] - [나] \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\
 &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} [다] \\
 &\text{따라서, } [가] \geq [나] \\
 &\text{한편, 등호는 } [라] \text{일 때 성립한다.}
 \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$
- ② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$
- ③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

9. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$ab + bc + ca \geq 3 ([가])$$

(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore S \geq 1 + 3 \sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3 \sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc, a = b = c = 1$

② $\sqrt[3]{abc}, a = 2$ 이고 $b = c$

③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 이고 $c = 2$

⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a = b = c = 2$

10. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()
안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$

④ $a - b$

⑤ ab

11. $x > 0, y > 0$ 일 때, $4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.



답: _____

12. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.



답:

13. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right)$$



답: _____

14. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.



답: _____

15. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

16. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다. $\cdots \textcircled{㉤}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉤

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉤

17. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고

한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

① 1

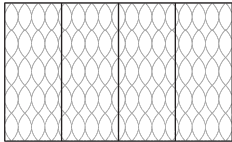
② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

18. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

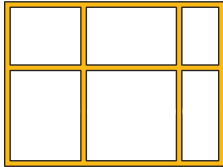
② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

19. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① (600, 40)

② (1200, 40)

③ (600, 30)

④ (1200, 30)

⑤ (450, 60)

20. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때
빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤ $8\sqrt{2}$

21. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.



답:

22. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때, $a + \sqrt{2}b + c$ 의 값을 P 라 하면, P 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \leq P \leq \sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3} \leq P \leq 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \leq P \leq 3\sqrt{3}$

23. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.



답:

24. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = 2$ 이 성립할 때,
 $ax + by$ 의 최댓값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{6}$

25. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

26. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y 에 대하여 $2x + 3y$ 의 값이 최대일 때,
 x 와 y 사이의 관계는?

① $x = y$

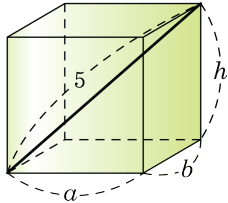
② $2x = 3y$

③ $3x = 2y$

④ $x = y^2$

⑤ $x^2 = y^2$

27. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

28. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1 , x_2 , x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$

② $\frac{144}{15}$

③ $\frac{144}{25}$

④ $\frac{288}{25}$

⑤ $\frac{576}{25}$

29. 넓이가 a 인 삼각형 ABC 의 내부에 한 점 P 에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

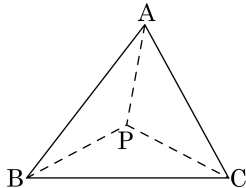
① $\frac{a^2}{3}$

② a^2

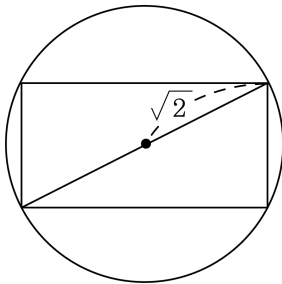
③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$

⑤ $3\sqrt{3}a^2$



30. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

31. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여

적당한 실수 r 가 존재하여

$a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.

그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = (가) \cdots (B)$ 이므로

$H = (나)$ 이다.

역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여

$H = (나)$ 이면,

식 (B) 가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.

(B) 에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면

식 (A) 가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수 r 이 존재하여

식 (A) 가 성립하기 위한 $(다)$ 조건은

$a \neq b$ 이고 $H = (나)$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 필요충분

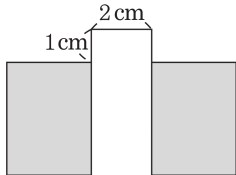
② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b},$ 필요충분

③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 충분

④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 필요

⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b},$ 충분

32. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① 1000 cm^2

② 1200 cm^2

③ 1600 cm^2

④ 2000 cm^2

⑤ 2400 cm^2

33. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ 2

34. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.



답: _____

35. 임의의 양수 x, y 에 대하여 부등식 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{k(x+y)}$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k \geq 1$

② $k \geq 2$

③ $k \leq -1$

④ $k \leq -2$

⑤ $k \leq \frac{2}{3}$

36. 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,

$\left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right) \left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.



답: _____

37. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{\text{가}}$$
 이고,

등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{ 1 + (abc)^{\frac{1}{3}} \right\}^3$$

$$\text{그러므로 } (abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{\text{나}}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a = b = c = 1$

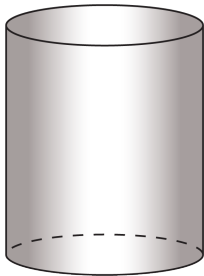
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a = 2$ 이고 $b = c$

③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 1$

④ abc , $a = b$ 또는 $c = 2$

⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 2$

38. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

39. $\angle A = 30^\circ$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$ 인 삼각형 ABC 에서 변 BC 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 에서 직선 AB , AC 에 내린 수선의 발을 각각 M , N 이라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$ 의 최솟값은?

① $\frac{25}{4}$

② $\frac{25}{3}$

③ $\frac{25}{2}$

④ 25

⑤ 35

40. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$$

① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$

② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$

④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$

41. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 a, b, c, d, e 라고 할 때, $a + 3b + 5c + 7d + 9e$ 의 최솟값은?

① 83

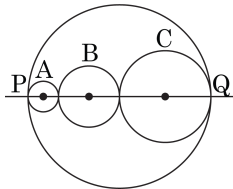
② 85

③ 87

④ 89

⑤ 91

42. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$

② $6\sqrt{35}$

③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$

⑤ $12\sqrt{35}$