1. $x > 0$, $y > 0$ 일 때, $(3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right)$

$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$

$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$

$= 13 + 12 = 25$

$\therefore (3x + 4y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 25$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

2. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0$, $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$
$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$
$=5+4=9$
따라서 최솟값은 9이다.
(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

3. 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

4. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

5. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

6. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A=\dfrac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\dfrac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$
④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠
$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$
$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

7. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$
③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$
④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$
⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

8. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

[(가)] - [(나)]
$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
$= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)]
따라서, [(가)] $\geq$ [(나)]
한편, 등호는 [(라)] 일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$

② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

한편, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

9. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)

10. 다음은 $a > 0,\ b > 0$일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. (　　　　)
안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\qquad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$　　② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$　　③ $a+b$
④ $a-b$　　⑤ ab

해설

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

11. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $4x + y + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 0,\ y > 0$ 일 때 $4x + y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 4$$

$\therefore\ 4x + y + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4

12. $a>0,\ b>0$일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$

$a>0,\ b>0$이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

13. $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)&=ab+\frac{4}{ab}+5\\&\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9\end{aligned}$$

따라서, 최솟값은 9

14. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+12y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$x>0,\ y>0$이므로

$\left(3x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+12y\right)=3+36xy+\frac{1}{xy}+12$

$=15+36xy+\frac{1}{xy}\geq 2\cdot\sqrt{36\frac{1}{xy}\cdot xy}+15=27$

15. $a>0,\ b>0$일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=2+ab+\frac{1}{ab}$

산술기하평균의 관계에 의해

$ab+\frac{1}{ab}\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=2$

$\therefore\ 2+ab+\frac{1}{ab}$ 의 최솟값은 4

16. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots$ ㉠ $\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡ $\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢ 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots$ ㉣

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는

$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $y=4x$일 때이고,

㉢ 에서 등호가 성립하는 경우는

$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.

따라서, $x+y$의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

17. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

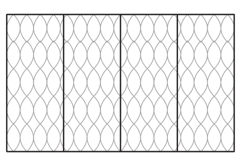
$lmn = pqr$이다.

따라서, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

18. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b \geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

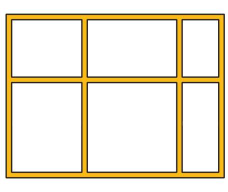
$\therefore\ ab \leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab \leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

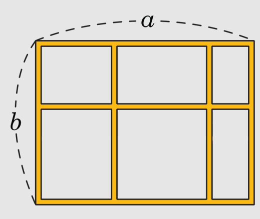
19. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$ ② $(1200, 40)$ ③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$ ⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because \ 3a + 4b = 240)$

$\therefore \ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240,$

$\therefore \ a = 40$

20. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$xy = 8 \cdots$ ㉠

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.

$x > 0,\ y > 0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.

$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.

$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

21. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\leq \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144$

$\therefore\ -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

22. $a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=2$일 때, $a+\sqrt{2}b+c$의 값을 P라 하면, P의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \le P \le \sqrt{2}$　② $-2\sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \le P \le \sqrt{3}$　④ $-2\sqrt{3} \le P \le 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \le P \le 3\sqrt{3}$

해설

$a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=2$일 때
코시-슈바르쯔 부등식을 이용하여
$(1^2+\sqrt{2}^2+1)(a^2+b^2+c^2) \ge (a+\sqrt{2}b+c)^2$
$4 \cdot 2 \ge (a+\sqrt{2}b+c)^2$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \le a+\sqrt{2}b+c \le 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow\ -2\sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{2}$

23. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

24. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=1$이고 $x^2+y^2=2$이 성립할 때, $ax+by$의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$에 주어진 값
$a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=2$을 대입하면
$1\times 2 \geq (ax+by)^2$이다.
따라서 $-\sqrt{2} \leq ax+by \leq \sqrt{2}$
$\therefore\ ax+by$의 최댓값은
$\sqrt{2}$이다.

25. a, b, c가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=4$일 때 $a+b+\sqrt{2}c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\left\{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2\right\}(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+\sqrt{2}c)^2$$

$\therefore\ (a+b+\sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$

$\therefore\ -4 \leq a+b+\sqrt{2}c \leq 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$\therefore\ M=4,\ m=-4$

$M-m=8$

26. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y에 대하여 $2x+3y$의 값이 최대일 때, x와 y사이의 관계는?

① $x=y$　　② $2x=3y$　　③ $3x=2y$

④ $x=y^2$　　⑤ $x^2=y^2$

해설

$x^2+y^2=k$라 하면

$(x^2+y^2)(2^2+3^2) \geq (2x+3y)^2$

($\because$코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

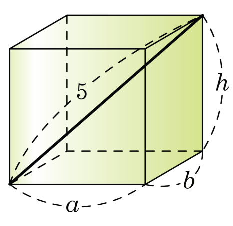
$\therefore 13k \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13}k \leq 2x+3y \leq \sqrt{13}k$

이 때, 등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$일 때 성립하므로

$3x=2y$

27. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　　② $4\sqrt{5}$　　③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$　　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

 : $20\sqrt{3}$

28. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을

$\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$이라 하면

$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로

$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$

$\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10$이므로

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$

코시-슈바르츠 부등식에서

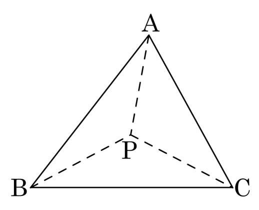
$(3^2 + 4^2 + 5^2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$

$\therefore 50 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) \geq 576$

$\therefore {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$

따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

29. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 최솟값은?

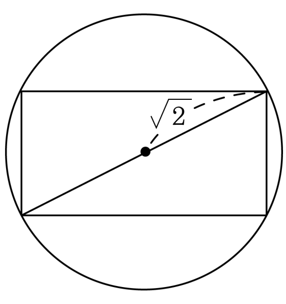


① $\dfrac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

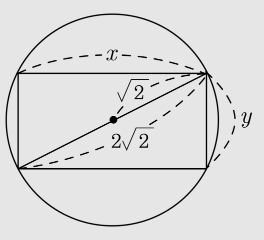
$S_1+S_2+S_3=a$
$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\geq(S_1+S_2+S_3)^2=a^2$
$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2\geq\dfrac{a^2}{3}$

30. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

31. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

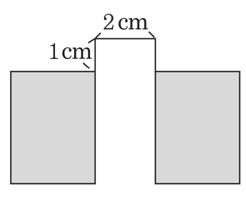
위의 증명에서 (가) , (나) , (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분　② $\frac{H-b}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 충분　④ $\frac{b-H}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$
$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$
$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$
$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$
따라서 (다) 필요충분조건

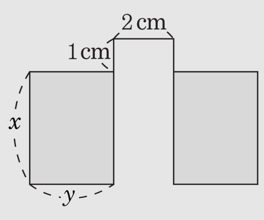
32. 폭이 200cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



① $1000\,\text{cm}^2$ ② $1200\,\text{cm}^2$ ③ $1600\,\text{cm}^2$

④ $2000\,\text{cm}^2$ ⑤ $2400\,\text{cm}^2$

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를 y cm, 세로를 x cm 라고 하면

$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서

$4x + 2y = 196 x > 0,\ y > 0$ 이므로

(산술평균) ≥(기하평균) 에서

$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$

$\therefore\ xy \leq \frac{49^2}{2},\ 2xy \leq 49^2,\ 2xy \leq 2401$

따라서 단면의 최대 넓이는 $2xy = 2401$

33. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2 이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

34. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \leq 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \leq 60,\ 20xy \leq 900$
$\therefore xy \leq 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

35. 임의의 양수 x, y에 대하여 부등식 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \le \sqrt{k(x+y)}$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \ge 1$ ② $k \ge 2$ ③ $k \le -1$
④ $k \le -2$ ⑤ $k \le \frac{2}{3}$

해설

준식의 양변을 제곱하여 정리하면
$k \ge \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}$
$\therefore k \ge 1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \cdots$①
그런데 $x+y \ge 2\sqrt{xy}$ 에서 $1 \ge \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ 이므로
$\therefore 2 \ge 1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \cdots$②
$\therefore$ ①, ②에서 $k \ge 2$

36. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$\quad +2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$ 이므로

$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$

$x+y+z=1$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\quad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(\text{준식})\geq 8+36+81=125$

37. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $abc \le 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

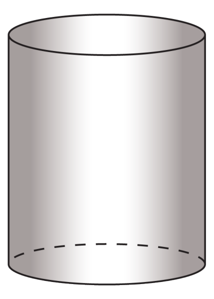
주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$ 에서
$a=b=c=1$

38. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원

④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,

부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠

철판의 넓이를 S 라 하면

$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$

$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$

단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$ 일 때,

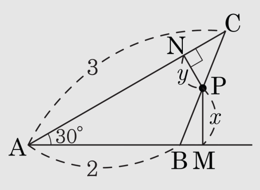
곧 $x = 2$일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

39. $\angle A = 30°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$인 삼각형 ABC에서 변 BC위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은?

① $\dfrac{25}{4}$ ② $\dfrac{25}{3}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

해설



$\overline{PM} = x$, $\overline{PN} = y$라 하면

$\triangle APB + \triangle APC = \triangle ABC$이므로

$\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot y = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 30°$

$\therefore\ 2x + 3y = 3$

$x > 0,\ y > 0$이므로

$\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \cdot (2x + 3y) = 13 + 6\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$

$\geq 13 + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{x}{y}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \times 3 \geq 13 + 12 = 25$

$\therefore\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} \geq \dfrac{25}{3}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$

40. 실수 a, b, c가 다음 두 등식을 만족할 때, c값의 범위는?

$$a + b + c = 5,\ \ b^2 + c^2 = 11 - a^2$$

① $-\frac{1}{2} \le c \le \frac{1}{2}$　② $-3 \le c \le \frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3} \le c \le 3$
④ $1 \le c \le \frac{3}{2}$　⑤ $1 \le c \le \frac{5}{2}$

해설

$a + b = 5 - c, \quad a^2 + b^2 = 11 - c^2$을
코시-슈바르츠 부등식
$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \ge (a + b)^2$에 대입하면
$2(11 - c^2) \ge (5 - c)^2$
$3c^2 - 10c + 3 \le 0,\ (3c - 1)(c - 3) \le 0$
$\therefore\ \frac{1}{3} \le c \le 3$

41. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 라고 할 때, $a+3b+5c+7d+9e$의 최솟값은?

① 83 ② 85 ③ 87 ④ 89 ⑤ 91

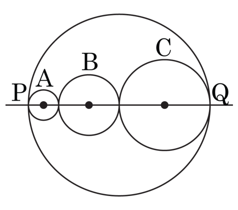
해설

$a+3b+5c+7d+9e$
$=(10-9)a+(10-7)b+(10-5)c+(10-3)d+(10-1)e$
$=10(a+b+c+d+e)-(9a+7b+5c+3d+e)$
$=10\times25-(9a+7b+5c+3d+e)$
여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(9^2+7^2+5^2+3^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\geq(9a+7b+5c+3d+e)^2$
$(9a+7b+5c+3d+e)\leq(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)$이고
등호는 $\frac{a}{9}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}=\frac{d}{3}=\frac{e}{1}$일 때, 성립한다.
$\therefore\ a+3b+5c+7d+9e\geq10\times25-(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)=250-(165)=85$
따라서, $a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때,
준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$가 자연수이므로
$a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때
준식은 최소가 된다.

42. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2,\ S_2 = 4\pi y^2,\ S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$

$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$