

1.  $a > b > 0$  일 때, 다음  $2a + b$ ,  $a + 2b$  의 대소를 비교하면?

①  $2a + b < a + 2b$

②  $2a + b \leq a + 2b$

③  $2a + b > a + 2b$

④  $2a + b \geq a + 2b$

⑤  $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

2. 세 수  $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$ ,  $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ,  $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를  
바르게 나타낸 것은?
- ①  $A < B < C$                       ②  $A < C < B$                       ③  $B < A < C$   
④  $C < A < B$                       ⑤  $C < B < A$

해설

$A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $C > 0$  이므로  
 $A^2, B^2, C^2$ 의 대소를 비교한 것과 같다.  
 $A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$   
 $B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$   
 $C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$   
이므로  $A^2 > B^2 > C^2$  이다.  
따라서  $A > B > C$

3.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $(3x + 4y) \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0, y > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

$$= 3 + \frac{4y}{x} + \frac{9x}{y} + 12 \geq 15 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}}$$

$$= 15 + 12$$

(단, 등호는  $\frac{4y}{x} = \frac{9x}{y}$ , 즉  $3x = 2y$  일 때 성립)

따라서 최솟값은 27이다.

4. 양의 실수  $a, b, c$  사이에 대하여  $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$  의 최솟값을 구하여라.

① 9                      ② 11                      ③ 13                      ④ 15                      ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

5.  $x \geq 0, y \geq 0$ 이고  $x + 3y = 8$ 일 때,  $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2                      ② 3                      ③  $\sqrt{10}$                       ④  $\sqrt{15}$                       ⑤ 4

해설

$x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$   
 $= 2(x + 3y)$   
 $= 16$  (단, 등호는  $x = 3y$ 일 때 성립)  
그런데  $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로  
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$   
따라서  $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

6.  $0 < a < 1$  일 때,  $P = \frac{1}{a}$ ,  $Q = \frac{1}{2-a}$ ,  $R = \frac{a}{2+a}$  의 대소 관계로 옳은 것은?

- ①  $P < R < Q$       ②  $R < Q < P$       ③  $Q < P < R$   
 ④  $Q < R < P$       ⑤  $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2-a > 0$ ,  $1-a > 0$  이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉,  $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a-2 < 0$ ,  $a+1 > 0$  이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉,  $P > R$

$$\text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$$

$$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$$

이 때  $2-a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a^2-a+2 > 0$  이므로  $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$  따라서,  $P > Q > R$ 이다.

7. 세 실수  $a, b, c$  사이에 두 관계식  $3a - b + c = 2$ ,  $a + b + c = 4$ 가 성립한다.  $a > 1$  일 때,  $a, b, c$ 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

①  $a < b < c$

②  $a < c < b$

③  $b < c < a$

④  $c < a < b$

⑤  $c < b < a$

해설

$$3a - b + c = 2 \cdots \cdots ①$$

$$a + b + c = 4 \cdots \cdots ②$$

$$① + ② \text{ 하면 } 4a + 2c = 6$$

$$2a + c = 3, a > 1 \text{ 이므로}$$

$$c = 3 - 2a \text{ 에서 } c < 1$$

$$① - ② \text{ 하면 } 2a - 2b = -2$$

$$\therefore a - b = -1, b = a + 1 \text{ 이므로}$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } b > a$$

$$\therefore c < a < b$$

8.  $a > b > 0$  일 때,  $a^2 > b^2$  이다. 임을 이용하여  $x > y > -1$  일 때,  $\sqrt{x+1}$ ,  $\sqrt{y+1}$  의 대소를 비교하면?

①  $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

②  $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③  $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤  $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

9. 실수  $a, b$  에 대하여 다음 중  $|a - b| > |a| - |b|$  가 성립할 필요충분조건인 것은?

- ①  $ab \leq 0$
- ②  $ab \geq 0$
- ③  $a + b \geq 0$
- ④  $ab < 0$
- ⑤  $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$  에 대하여  
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$   
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$   
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$  이려면  
 $a$  와  $b$  가 서로 부호가 반대이어야 한다.  
따라서  $ab < 0$

10.  $a > 0$  일 때,  $A = 1 + \frac{a}{2}$ ,  $B = \sqrt{1+a}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $A > B$

②  $A < B$

③  $A \geq B$

④  $A \leq B$

⑤  $A = B$

해설

$a > 0$  이므로  $1 + \frac{a}{2} > 0$ ,  $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서  $A^2 > B^2$  이므로  $A > B$  이다.

11.  $n$ 이 자연수 일 때,  $2^{10n}$ ,  $1000^n$  의 대소를 비교하면?

- ①  $2^{10n} < 1000^n$       ②  $2^{10n} \leq 1000^n$       ③  $2^{10n} > 1000^n$   
④  $2^{10n} \geq 1000^n$       ⑤  $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$ ,  $1000^n > 0$ 이고,  $n$ 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

12. 부등식  $|x + y| \leq |x| + |y|$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ①  $x = y$                       ②  $xy > 0$                       ③  $xy \geq 0$   
④  $x \geq 0, y \geq 0$               ⑤  $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$  의 양변을 제곱하여 정리하면  
 $xy = |xy|$   
( i )  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$   
( ii ) 또  $xy > 0$  이면  $x, y$  는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.  
 $xy = 0$  이면 등호가 성립한다.  
따라서,  $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$   
( i ), ( ii ) 에서  
 $xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

13.  $a, b$  가 실수일 때, 다음은 부등식  $|a| + |b| \geq |a + b|$  을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

①  $|a| \geq a$

②  $a \geq b, b \geq c$  이면  $a \geq c$

③  $|a|^2 = a^2$

④  $a - b \geq 0$  이면  $a \geq b$

⑤  $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$  이면  $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

14. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ①  $a, b$ 의 산술 평균은  $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ②  $\sqrt{ab}$ 는  $a, b$ 의 기하평균이다.
- ③  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시  $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$  절대부등식

$\frac{a+b}{2}$ : 산술평균,  $\sqrt{ab}$ : 기하평균

④: 절대부등식의 등호는  $a = b$ 일 때 성립한다.

15.  $a > 0$  일 때,  $2a + \frac{1}{2a}$  의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$  이므로  $2a > 0$  산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

16. 양수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

그런데  $a^2 + b^2 = 1$  이므로  $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

따라서  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

17. 방정식  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 의 최솟값은?

① 16      ② 17      ③ 18      ④ 19      ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서  $xy \geq 16$  이므로  $xy$ 의 최솟값은 16

18.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

19.  $x > 3$ 일 때  $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때,  $x > 3$ 이므로  $3(x-3) > 0$ ,  $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$ , 즉  $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

20.  $a, b, x, y$ 가 실수이고,  $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때  $ax + by$ 의  
최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 16

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$$

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = -16$$

21. 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  일 때  $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값  $M$ 과 최솟값  $m$ 은?

①  $M = 3, m = 0$

②  $M = 3, m = -3$

③  $M = 6, m = 0$

④  $M = 6, m = -6$

⑤  $M = 6, m = -12$

해설

$x, y, z$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$   
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$   
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$   
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$   
 $\therefore M = 6, m = -6$

22.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고,  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$   
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$   
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$   
이 때  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로  
 $0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$   
따라서 최댓값은 14이다.

23. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

①  $|a| + |b| \geq |a + b|$

②  $a \geq b > 0$  일 때  $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$

③  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0)$

④  $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{여기서}\end{aligned}$$

$(a+2)(b+2) > 0$  이고

$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0$  이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$



25. 세 수  $2^{60}$ ,  $3^{40}$ ,  $5^{30}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

②  $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③  $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④  $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤  $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

26. 부등식  $7^{20} < n^{10}$  을 만족시키는 자연수  $n$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수  $n$  의 최솟값은 50 이다.

27. 실수  $a, b$  에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

|                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| ㉠ $ a ^2 = a^2$            | ㉡ $ ab  \geq ab$           |
| ㉢ $ a  +  b  \geq  a - b $ | ㉣ $ a  -  b  \geq  a - b $ |

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} \text{㉣ } & (|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

28. 다음 중 절대부등식  $a^2 + ab + b^2 \geq 0$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ①  $a = b$
- ②  $ab > 0$
- ③  $a = b = 0$
- ④  $a > b$
- ⑤  $b > a$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \quad (\because \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0) \\ \therefore a^2 + b^2 + ab &\geq 0 \end{aligned}$$

단, 등호는  $a + \frac{1}{2}b = 0$  이고  $b = 0$  일 때, 즉,  $a = 0$  이고  $b = 0$  일 때, 성립한다.

29. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단,  $x, y, z$  는 실수이다.)

보기

- ㉠  $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ㉡  $x^2 + 4x \geq -4$
- ㉢  $|x| + |y| \geq |x - y|$
- ㉣  $x^2 \geq 0$
- ㉤  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

- ㉠  $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$   
 $= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow$  절대부등식
  - ㉡  $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow$  절대부등식
  - ㉢  $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$   
 $(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
  - ㉣  $x^2 \geq 0 \rightarrow$  절대부등식
  - ㉤  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$   
 $= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$   
 $\rightarrow$  절대부등식
- 따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

30. 부등식  $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$  이 절대부등식이 되기 위한 정수  $a$ 의 개수는?

- ① 3개      ② 4개      ③ 5개      ④ 6개      ⑤ 7개

해설

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0$ 이어야 하므로

$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$

$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

따라서 정수  $a$ 의 개수는  $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개

31.  $a \geq 0, b \geq 0$  일 때,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$  이므로  
부등식  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.  
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ①  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ②  $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③  $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ④  $>, a - b, a = b$
- ⑤  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$   
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$   
(가), (나)의 결과에서  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로  
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   
(다)  $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서  
등호가 성립할 때는  $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$ 일 때이므로  
등호는  $a = b$ 일 때 성립한다.

32.  $a > 0, b > 0, a + b = 4$  일 때,  $ab$  의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$  일 때,  
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  이므로  
 $a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}, 0 \leq ab \leq 4$   
따라서  $ab$  의 최댓값은 4

33. 양수  $x, y$ 에 대하여  $\left(x + \frac{3}{y}\right)\left(3y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3xy + 1 + 9 + \frac{3}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}} + 10 \\ &= 2 \cdot 3 + 10 = 16\end{aligned}$$

34.  $x > 0, y > 0, x + 2y = 1$  일 때,  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0, y > 0$  이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}, \frac{1}{2} \geq \sqrt{2xy}, \frac{1}{8} \geq xy$$

즉  $xy$  의 최댓값은  $\frac{1}{8}$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{xy}} \text{ 이므로 } xy = \frac{1}{8} \text{ 일 때 최소}$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$$

해설

$$x + 2y = 1 \text{ 이면 } y = \frac{1-x}{2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{2}{x(1-x)}$$

$x(1-x)$  의 최댓값을 구하는 문제

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2 + x = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\therefore x(1-x)$  의 최댓값은  $\frac{1}{4}$  이고

$$\text{이때 } \frac{2}{x(1-x)} \text{ 의 최솟값은 } \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

35.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$  의 최솟값은?

① 6

② 9

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) = ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab}$$

$$ab + \frac{9}{ab} \geq 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} = 2\sqrt{9} = 6$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) \geq 10 + 6 = 16$$

36.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

37.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$  의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

38. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

①  $\frac{25}{4}$

②  $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④  $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤  $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각  $a, b$  라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은  $\frac{25}{4}$  이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

39. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$   
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로  $100 \geq (x + 3y)^2$   
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$   
 $\therefore M = 10, m = -10$   
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

40. 실수  $a, b$  에 대하여  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$a, b$  가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$  에서

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$  이므로

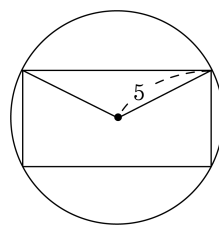
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는  $a = b$  일 때 성립)

따라서  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은 2이다.

41. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $5\sqrt{2}$       ③  $10\sqrt{2}$   
 ④  $20\sqrt{2}$       ⑤  $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,  
 가로 길이를  $a$ , 세로 길이를  $b$  라 하면  
 $a^2 + b^2 = 100$   
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해  
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$   
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$  이므로  
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은  
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

42.  $x, y$  가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

|                                                           |                                                             |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$                | $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$ |
| $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad  x  +  y  \geq  x - y $ | $\textcircled{\tiny \supset} \quad  x + y  \geq  x - y $    |

- ①  $\textcircled{\tiny \neg}$

②  $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③  $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④  $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤  $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$  일 때만 성립한다.  
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$   
(단, 등호는  $x = y = 0$  일 때 성립)  
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$   
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$   
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$   
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$   
(단, 등호는  $xy \leq 0$  일 때 성립)  
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$  (반례)  $x = 2, y = -3$  일 때  
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$  이므로  
 $|x + y| < |x - y|$   
따라서 절대부등식이 아닌 것은  $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$  이다.

43.  $a, b, c, d, x, y, z$ 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

- ㉠  $a^2 + b^2 \geq ab$
- ㉡  $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
- ㉢  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$
- ㉤  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ㉥  $|a| - |b| \geq |a - b|$
- ㉦  $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

- ㉠  $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$   
 $= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$   
 $\therefore a^2 + b^2 \geq ab$ : 맞음
- ㉡  $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$   
 $= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$   
 $= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$   
 $\therefore a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$ : 틀림
- ㉢  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$   
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$   
 $+ b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$   
 $= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$   
 $\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ : 틀림
- ㉤  $|a| + |b|$ 의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)  
 $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$   
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$   
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0 (\because |ab| \geq ab)$   
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ : 맞음
- ㉥  $|a| - |b|$ 의 차 비교  
 $(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$   
 $= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$   
 $= -2|ab| + 2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$   
 $\therefore |a| - |b| \leq |a - b|$ : 틀림
- ㉦  $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$   
 $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$   
 $= 2ab + 2|ab| \geq 0$   
 $\therefore |a + b| \geq |a| - |b|$ : 맞음

44. 다음은  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수  $x, y$ 에 대하여  $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서  $x+y$ 의 최솟값은 8이다. ....㉣

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는  $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$   
즉  $y = 4x$ 일 때이고,  
㉡에서 등호가 성립하는 경우는  
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.  
따라서  $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

45.  $x > 1$  일 때,  $2x + \frac{2}{x-1}$  는  $x = a$  일 때, 최솟값  $b$  를 갖는다. 이 때,  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left( x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \left( x + \frac{1}{x-1} \right) \geq 3 \cdot 2 = 6$$

최솟값은  $x-1 = \frac{1}{x-1}$  일 때 6이다

$\therefore$  즉,  $x = 2$  일 때 최솟값은 6이다.

$$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$$

46. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때,  $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

① 3              ② 3.5              ③ 4              ④ 4.5              ⑤ 5

해설

B( $a, 0$ ), C( $0, b$ )이므로  
 $\triangle OBC$ 의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{A}$$

직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$$\therefore S \geq 4$$

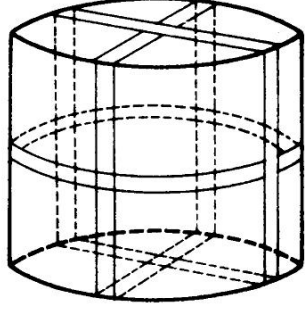
47.  $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x$ 가 취할 수 있는 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$ 에서  $y+z=4-x\cdots\textcircled{1}$   
 $x^2+y^2+z^2=6$ 에서  $y^2+z^2=6-x^2\cdots\textcircled{2}$   
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$   
(단, 등호는  $y=z$  일 때 성립)  
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면  
 $2(6-x^2)\geq(4-x)^2, 3x^2-8x+4\leq 0$   
 $(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x\leq 2$   
따라서  $M=2, m=\frac{2}{3}$  이므로  $\frac{M}{m}=3$

48. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를  $r$ , 높이를  $h$  라 하면  
 $2 \times 2(2r + h) + 2\pi r = 60 \dots \textcircled{1}$   
 한편, (산술평균)  $\geq$  (기하평균) 이므로  $\dots \textcircled{2}$   
 $8r + 4h + 2\pi r \geq 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \dots \textcircled{3}$   
 즉,  $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{\pi r^2 h}$   
 따라서,  $\pi r^2 h \leq 125 \dots \textcircled{4}$   
 이상에 의해, 구하려는 최대 부피는  $125 \text{ cm}^3$  이다.  $\dots \textcircled{5}$

① ㉠      ② ㉡      ③ ㉢      ④ ㉣      ⑤ ㉤

**해설**

$8r + 4h + 2\pi r$   $3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$ 에서  
 등호는  $8r = 4h = 2\pi r$  일 때 성립한다.  
 그런데  $8 \neq 2\pi$  이므로 최대 부피는  $125 \text{ cm}^3$  가 아니다.

49. 실수  $x$ 에 대하여, 분수식  $\frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 + 3x^2 + 6}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)} + \frac{4}{(x^2 + 1)} \\ &= (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \\ & x^2 + 1 > 0 \text{ 이므로,} \\ & (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} \geq 2 \cdot \sqrt{(x^2 + 1) \cdot \frac{4}{(x^2 + 1)}} = 4 \\ & \therefore (x^2 + 1) + \frac{4}{(x^2 + 1)} + 1 \geq 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

50. 두 이차방정식  $x^2 - ax + b = 0$ 과  $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수  $a, b$ 의 값을 정할 때,  $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ ,  $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을  $\gamma, \sigma$ 라 하자. 이 때,  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,  
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.  
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$   
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$   
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$