

1. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

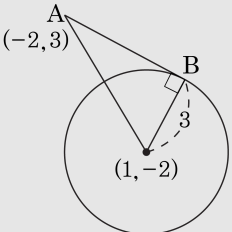
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



2. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 의
공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O' 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \overline{BO'} = 1$$

$$\therefore \overline{OH} = 2 - 1 = 1$$

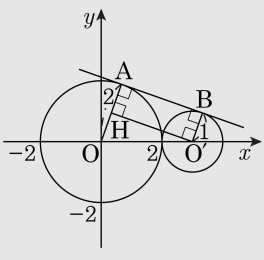
두 원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, $(3, 0)$ 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$



3. 점(3, -1) 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $2x - y + 1 = 0$

② $y = -x + 2$ 또는 $4x + 7y - 1 = 0$

③ $y = -2x + 5$ 또는 $x - 2y - 5 = 0$

④ $y = 2x - 6$ 또는 $x + 5y - 4 = 0$

⑤ $y = -3x + 3$ 또는 $4x - 2y - 9 = 0$

해설

직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은(3, -1) 을 지나므로

$$y = mx - 3m - 1$$

또한 이 직선은 원의 접선이므로 대입하면

$$x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 1 - 6m^2x + 6m - 2mx = 5$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(3m^2 + m)x + 9m^2 + 6m - 4 = 0$$

이 방정식이 중근을 가져야 하므로

$$(3m^2 + m)^2 - (m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 4) = 0$$

$$9m^4 + 6m^3 + m^2 - 9m^4 - 6m^3 + 4m^2 - 9m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$-4m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore (m + 2)(2m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } \frac{1}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -2x + 5 \text{ 또는 } x - 2y - 5 = 0$$

4. 한 변의 길이가 a 인 정사각형 ABCD 의 외부에 있는 점으로서 두 꼭짓점을 바라보는 각이 90° 를 이루는 점의 자취의 길이는? (단, 변을 통과하여 바라볼 수는 없다.)

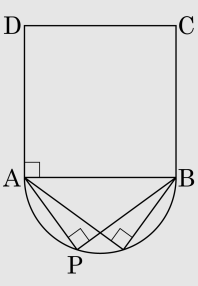
- ① πa ② $\sqrt{2}\pi a$ ③ $2\pi a$
 ④ $2\sqrt{2}\pi a$ ⑤ $4\pi a$

해설

두 점 A, B 를 바라보는 각이 90° 되는 점 P 의 자취는 AB 를 지름으로 하는 (바깥쪽의) 반원이다.

4개의 반원의 길이의 합이므로

$$2 \times \left(2\pi \frac{a}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right) = 2\pi a$$

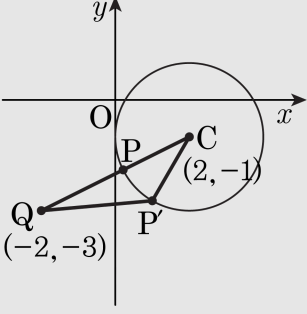


5. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 $Q(-2, -3)$ 까지의 거리의 최솟값을 구하면?

- ① $2(\sqrt{2}-1)$
 ② $2(\sqrt{3}-1)$
 ③ $2(\sqrt{5}-1)$
- ④ $2(\sqrt{6}-1)$
 ⑤ $2(\sqrt{7}-1)$

해설

$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서
 $(x + (m-1))^2 + (y - m)^2 = -m^2 - 2m + 3$
 반지름의 길이를 r 라고 하면
 $r^2 = -m^2 - 2m + 3 = -(m+1)^2 + 4$
 즉, $m = -1$ 일 때, $r = 2$ 로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이 $\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점을 P라 하면,
 원, C 위의 임의의 점 P'에 대하여
 $\overline{CP} = \overline{CP'} = 2$ 이고
 $\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} \leq \overline{CP'} + \overline{P'Q}$ 이므로
 $\overline{PQ} \leq \overline{P'Q}$
 따라서, P가 $\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점일 때,
 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이다.
 중 심 (2,-1) 과 점 Q(-2,-3) 까 지 의 거 리 는
 $\sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$
 따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5} - 1)$