

1. 원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B + C$ 의 값은?

① 4

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -4

해설

원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원은
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$ 으로 나타낼 수 있다.

이 식을 전개하면

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\text{따라서 } A + B + C = -2 + 4 - 4 = -2$$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ 이 나타내는 도형을 바르게 설명한 것을 고르면?

- ① 중심 (1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
- ② 중심 (1, -2) 이고 반지름이 1 인 원
- ③ 중심 (-1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
- ④ 중심 (1, -2) 이고 반지름이 2 인 원
- ⑤ 중심 (1, 2) 이고 반지름이 2 인 원

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 &= 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 1 \\ \therefore \text{중심은 } (1, -2) \text{ 이고, 반지름이 } 1 \text{ 인 원} \end{aligned}$$

3. 점 (5, 1)과 (-1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$ ② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$ ④ $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 21$

⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 C(2,4)

구하는 원의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

4. 점 $(1, 5)$, $(-2, -4)$, $(5, 3)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓으면
 $\textcircled{1}$ 은 세 점 $(1, 5)$, $(-2, 4)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 연립방정식은
 $26 + A + 5B + C = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $20 - 2A + 4B + C = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $34 + 5A + 3B + C = 0 \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 연립방정식을 풀면
 $A = -2$, $B = 0$, $C = -24 \cdots \textcircled{5}$

5. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서

$x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로

두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$$

$$4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

6. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 (1, 2) 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

7. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$

② $k > -5$

③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$

⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k+5$$

이 때, $k+5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

8. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP}$ 의 최댓값은? (단, O 는 원점)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

이 원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4^2$

다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면

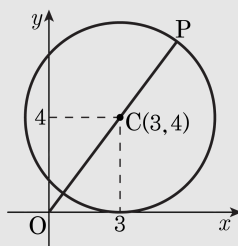
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나

는

두 점 중 한 점을 P 라 할 때,

$\overline{OP}$ 가 최대이다.

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} + 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$$



9. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

10. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

- ㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

㉡ $(x + 1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y + 3)^2 = 2$

㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

- ① ㉠

② ㉠, ㉤

③ ㉡
- ④ ㉢, ㉣

⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
 $|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.

㉠ 만나지 않는다.

㉡ 내접한다.

㉢ 외접한다.

11. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$

- ① -1
- ② -2
- ③ -3
- ④ -4
- ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2+y^2+2x+3y-1=0,$$

$$x^2+y^2+2x+2y-3=0$$

연립하여 풀면 $(x,y)=(-3,-2),(1,-2)$

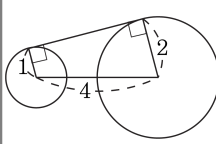
그러므로 $(a,b)=(-3,-2)$

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

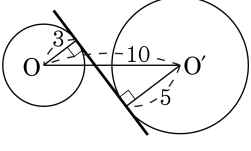
- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의
길이를 구하면
 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이다.



13. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

14. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

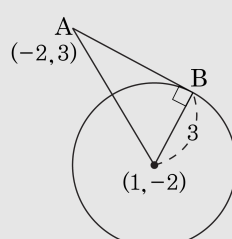
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



15. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

16. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$ ③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의

중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

17. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 A(1, -1), B(3, 5) 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
구하는 원의 방정식의 중심을 (a, a) ,
반지름을 r 라고 하면,
 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$
이것이 A(1, -1), B(3, 5)를 지나므로
 $(1 - a)^2 + (-1 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$
 $(3 - a)^2 + (5 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면, $16a - 32 = 0 \quad \therefore a = 2$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면, $r^2 = 10$
 $\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
 $\therefore$ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

18. 원 $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p + q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0 \text{을}$$

표준형으로 고치면

$$(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 5a^2 - 30a + 48$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 30a + 48) = 5\pi(a - 3)^2 + 3\pi$$

따라서 $a = 3$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(6, -3)$

$$\therefore p = 6, q = -3$$

$$\therefore p + q = 3$$

19. 좌표평면 위에 원 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 가 있다. 이 원에 접하는 접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점을 P 라 할 때, 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① 4π ② $5\sqrt{2}\pi$ ③ $6\sqrt{2}\pi$ ④ $7\sqrt{3}\pi$ ⑤ 8π

해설

원 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 에 접하는 접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점은 원의 중심으로부터의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다. 따라서 점 P 의 자취는 $6\sqrt{2}\pi$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ 의 공통현의 길이는?

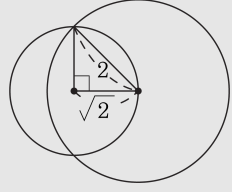
- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 = 4, (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$$\therefore \text{현의 길이} : 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

21. 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의
둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값의 합은?

- ① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y - 4 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x + 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
 $(1 + a)x + (a + 1)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\textcircled{㉠}$ 이 점 $(-1, -a)$ 를 지나므로
 $(1 + a) \times (-1) + (a + 1) \times (-a) - 2 = 0$
 $a^2 + 2a = 0$
 $\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

22. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

23. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$

양변을 제곱하면

$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y = -2x + 5$

따라서 y 절편은 5이다.

24. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, ΔPAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

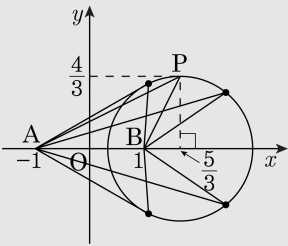
$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, ΔPAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 ΔPAB 의

넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



26. 직선 $ax + by + 2 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이
거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|a \times 0 + b \times 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$

$\therefore$ 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

27. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

- ① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ 이고

그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는 $4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$
 $3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리
 $\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$
 $|9 + n| = 10$
 $\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$
 $\therefore 1 - 19 = -18$

28. $(k, 0)$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① $k = -\sqrt{2} + 1$ ② $k = \sqrt{2} + 1$ ③ $k = \sqrt{2} - 1$
④ $k = 2\sqrt{2} + 1$ ⑤ $k = \sqrt{2} + 2$

해설

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 에서 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 이므로
두 접선 중 하나는 x 축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1 이다. ($\because k > 0$)
따라서 접선의 방정식을 $y = -x + b$ 로 놓으면 $x + y - b = 0$
이 때, 원의 중심 $(0, 1)$ 에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0 + 1 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$$

$$\therefore |1 - b| = \sqrt{2}$$

$$b > 1 \text{ 이므로 } b - 1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore b = \sqrt{2} + 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + \sqrt{2} + 1$ 이고

점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + \sqrt{2} + 1 \quad \therefore k = \sqrt{2} + 1$$