

1. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$

② $-r(x)$

③ 0

④ $r(x)$

⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)\{Q(x) - 1\} - r(x)$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

2. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2 \text{ 이므로}$$

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2 \end{aligned}$$

3. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $ax + by = 0$
- ② $a + b = x + y$
- ③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- ④ $x = y$
- ⑤ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0$ 을
간단히 정리하면
 $a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = 0$
즉, $(ay - bx)^2 = 0$
 $\therefore ay - bx = 0$ ($\because a, x, b, y$ 는 실수)
따라서, $ay = bx$ 에서 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

4. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} &(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, \quad b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$

㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

5. $(-2x^3 + x^2 + ax + b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a - 2b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b + 2a)x^3$$

$$2a - 4b = -8$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

6. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z 라 하면

$$x + y + z = 22 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{이고}$$

겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이다.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 22^2 = 14^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 288$$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

8. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때, $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$$x^2 = 2 \text{를 대입하면 } 4a + b = -16$$

$$x^4 = -1 \text{을 대입하면 } -a + b = -1$$

$$\therefore a = -3, b = -4$$

$$\therefore 2a - b = -2$$

9. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -4 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)Q_1(x) + 5 \\&= (x+2)Q_2(x) - 4 \\&= (x-1)(x+2)Q_3(x) + R(x)\end{aligned}$$

$R(x) = ax + b$ 라 하면

$f(1) = 5$ 이므로

$$R(1) = a + b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$f(-2) = -4$ 이므로

$$R(-2) = -2a + b = -4 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의해 $a = 3$, $b = 2$ 이다.

$$\therefore R(x) = 3x + 2 \Rightarrow R(2) = 8$$

11. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

12. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & i \end{array}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+c+1 \end{array}$$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로

$$a+b+c = 0$$

따라서 ③이다.

13. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\&= (x + y)^2 - 2(x + y) \\&= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\&= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

14. $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$ 로 인수분해 될 때,
 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$$x^6 + 4x^4 + x^2 - 6 = (x+1)(x-1)(x^4 + 5x^2 + 6)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

15. $\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4}$ 의 값은?

- ① 2010 ② 2011 ③ 2012 ④ 2013 ⑤ 2014

해설

$a = 2012$ 라 치환하면,

$$\begin{aligned}\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4} &= \frac{a^3 + 2^3}{a \times (a - 2) + 4} \\ &= \frac{(a + 2)(a^2 - 2a + 4)}{a^2 - 2a + 4} \\ &= 2012 + 2 \\ &= 2014\end{aligned}$$

16. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

17. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$(가) \quad f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4$$
$$(나) \quad f(x) \text{와 } g(x) \text{의 최소공배수는 } x^3 - 7x + 6$$

이 때, $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수를 $G(x)$ 라 할 때, $G(2)$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최소공배수는

$$L(x) = (x-1)(x^2+x-6)$$
$$= (x-1)(x-2)(x+3) \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 두 다항식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수가 $G(x)$ 이므로

$$f(x) = G(x)A(x), \quad g(x) = G(x)B(x)$$

$A(x)$, $B(x)$ 는 서로소라 하면

$$f(x) + g(x) = G(x)A(x) + G(x)B(x)$$
$$= G(x) \color{red}{A(x) + B(x)} \text{이므로}$$

$f(x) + g(x)$ 는 $G(x)$ 를 인수로 갖는다.

$$f(x) + g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$$
$$= 2(x-2)(x+1) \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $G(x) = x-2$

$\therefore G(2) = 0$

18. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x 일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2-1$

② $2x^2-2$

③ $2x^2-3$

④ $2x^2+1$

⑤ $2x^2+2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b 는 서로소)

$$x^3+x^2-2x=(x-1)ab=x(x+2)(x-1)$$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$ 두식의 합은 $2x^2-2$

19. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

두 식 A, B 의 최대공약수를 G 라 하면

$A = Ga, B = Gb(a, b$ 는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore G = x + 2$

20. 다항식 $f(x) = x^4 + ax^2 + x + 2$ 를 $g(x) = x^3 + bx + 2$ 로 나눈 나머지가 $R(x)$ 라 한다. $g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x + 2$ 일 때, ab 의 값은?

① 9

② 10

③ 12

④ 15

⑤ 16

해설

$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$ 에서
 $g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수 $x + 2$ 는
 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
 $f(-2) = 16 + 4a = 0, a = -4$
 $g(-2) = -8 - 2b + 2 = 0, b = -3$
 $\therefore ab = 12$

21. $a^2 = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha$, $(2-a)^n = \beta$ 로 놓으면

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$$

$$= 4(4-3)^n = 4$$

22. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ 를 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab + bc + ca)$ 의 값을 구하면 $(ab + bc + ca) = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 에서

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ 이므로

$\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0$

$\therefore a = b = c = 2$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 24$

23. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

24. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

(우변) = $\{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$
= $\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2$
= $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3$
+ $\{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$
= $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)$
 $g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
 $-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$
 $\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$

25. $y = kx^2 + (1 - 2k)x + k - 1$ 의 그래프는 k 에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 B($b, 1$)라 할 때, AB의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 되도록 하는 b 의 값들의 합을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k 에 관하여 정리하면
 $(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k 의 값에 관계없이 성립할 조건은
 $x^2 - 2x + 1 = 0, x - y - 1 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 0$
 $\therefore A(1, 0)$
(ii) A(1, 0), B($b, 1$)에서
 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{(b - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$
 $b^2 - 2b = 0, b(b - 2) = 0 \therefore b = 0, 2$
 $\therefore b$ 의 값들의 합은 2

26. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

- ① $(-3)^{2007} + 1$ ② 0 ③ $3^{2007} + 1$
④ 1 ⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$$

27. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x) - g(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x + 1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $x + f(x)$

$\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $x - g(x)$
- $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $x + f(x)g(x)$

- $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
- $\textcircled{\tiny \text{㉣}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉢}}$

$\textcircled{\tiny \text{㉤}}$ $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}, \textcircled{\tiny \text{㉢}}$

해설

$f(x) + g(x) = (x + 1)Q(x)$
 $f(x) - g(x) = (x + 1)Q'(x) + 2$
 $x = -1$ 을 두 식에 각각 대입하면
 $f(-1) + g(-1) = 0 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉠}}$
 $f(-1) - g(-1) = 2 \cdots \textcircled{\tiny \text{㉡}}$
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $f(-1) = 1, g(-1) = -1$
보기의 식 중에서 $x + 1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x = -1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
 $\textcircled{\tiny \text{㉠}}$ $-1 + f(-1) = -1 + 1 = 0$
 $\textcircled{\tiny \text{㉡}}$ $-1 - g(-1) = -1 + 1 = 0$
 $\textcircled{\tiny \text{㉢}}$ $-1 + f(-1)g(-1) = -1 + 1 \times (-1) = -2$
 $\therefore \textcircled{\tiny \text{㉠}}, \textcircled{\tiny \text{㉡}}$

28. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

- ① 8 ② -8 ③ 12 ④ -12 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1} \\ &= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2} \\ &= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

나머지 정리에 의해

i) ①에서 $f(a) = a+2$, ③에서

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Rightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

ii) ①에서 $f(-b) = -b+2$, ②에서

$$\begin{aligned} f(-b) &= b+4 \\ \Rightarrow b &= -1 \end{aligned}$$

iii) ②에서 $f(c) = -c+4$, ③에서

$$\begin{aligned} f(c) &= 0 \\ \Rightarrow c &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore abc = 8$$

29. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

30. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

31. a, b, c 가 $\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$ 을 만족하는 삼각형의 모양은?
- ① 직삼각형
 - ② 이등변삼각형
 - ③ 직각삼각형
 - ④ 직각이등변삼각형
 - ⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 &= 0 \\ a^2(a + b) - b^2(a + b) - c(a^2 - b^2) &= 0 \\ (a + b)(a^2 - ac + bc - b^2) &= 0 \\ (a + b)\{((a - b)(a + b) - c(a - b))\} &= 0 \\ (a + b)(a - b)(a + b - c) &= 0 \\ a + b > 0, a + b - c > 0 \text{ 이므로 } a &= b \\ \therefore a = b \text{ 인 이등변삼각형} \end{aligned}$$

32. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000\end{aligned}$$

33. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$
 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 에
 $x=3$ 대입, $81 + 9a - 81 - 3a - 6a = 0$
 $x=-2$ 대입, $-24 + 4a - 36 + 2a - 6a \neq 0$ 이므로
 $x-1$ 을 인수로 가져야 한다.
 $x=1$ 대입 $3 + a - 9 - a - 6a = 0, a = -1$

34. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.

($\because AB = GL$)

i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$

이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$

이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

35. x^8 을 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$ 이고, $q_1(x)$ 를 $x-2$ 로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$ 일 때, $\frac{r_2}{r_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{8}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ 16
- ④ 21
- ⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \dots\dots\dots ①$

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \dots\dots\dots ②$

①에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8, r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2}$
 $= (x^7 + 2x^6 + \dots + 2^7)$

②에서 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2}, r_2 = (q_1(2))^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore r_2 = 2^{20}$

따라서, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

36. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x + 2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x + 2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$