1. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$$\begin{aligned}\therefore\ & f(x)-g(x)-2r(x)\\ &=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)\\ &=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)\end{aligned}$$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

2. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$ 을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$ ② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$ ④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$ 이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$ 을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$$\begin{aligned}\therefore\ (x+a)P(x)&=(x+a)(2x-a)\\&=2x^2+ax-a^2\end{aligned}$$

3. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$이고 $ab \neq 0$일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$ ② $a+b=x+y$ ③ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
④ $x=y$ ⑤ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수$)$
따라서, $ay=bx$에서 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

4. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a=1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$대입, $b=24$

5. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

6. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144　② 196　③ 288　④ 308　⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z라 하면

$x+y+z=22 \cdots\cdots ①$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14 \cdots\cdots ②$이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

7. $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$에 대하여 $f(x-1)=x^3+Ax^2+Bx+C$일 때, 상수$A\times B\times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)^2+2(x-1)+5$$
$$=x^3+Ax^2+Bx+C\cdots ㉠$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x=0$일 때, $-1=C$
$x=1$일 때, $5=1+A+B+C$
$x=2$일 때, $5=8+4A+2B+C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=-6,\ B=11,\ C=-1$

8. $f(x)$가 x의 다항식일 때, $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때, $2a-b$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$x^2=2$를 대입하면 $4a+b=-16$

$x^4=-1$을 대입하면 $-a+b=-1$

$\therefore\ a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ 2a-b=-2$

9. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

10. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)Q_1(x)+5 \\
&= (x+2)Q_2(x)-4 \\
&= (x-1)(x+2)Q_3(x)+R(x)
\end{aligned}
$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5\cdots$①

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4\cdots$②

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

11. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$

$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

12. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & a & b & c \\
 & & d & e & f \\
\hline
 & 1 & g & h & \boxed{i}
\end{array}
$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & a & b & c \\
 & & 1 & a+1 & a+b+1 \\
\hline
 & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1}
\end{array}
$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

13. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x+y$ ② $-x-y$ ③ $x+y-2$

④ $x-y$ ⑤ $2x+2y$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y) \\
&= (x+y)^2-2(x+y) \\
&= (x+y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

한편,

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2) \\
&= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

14. $x^6+4x^4+x^2-6$이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$로 인수분해 될 때, $a+b+c+d$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$x^6+4x^4+x^2-6=(x+1)(x-1)(x^4+5x^2+6)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$

$\therefore a+b+c+d=5$

15. $\dfrac{2012^3+8}{2012\times2010+4}$ 의 값은?

① 2010 ② 2011 ③ 2012 ④ 2013 ⑤ 2014

해설

$a=2012$ 라 치환하면,

$$\frac{2012^3+8}{2012\times2010+4}=\frac{a^3+2^3}{a\times(a-2)+4}$$

$$=\frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a^2-2a+4}$$

$$=2012+2$$

$$=2014$$

16. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times 3-(-2)\times 3| = 12$

17. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots ㉠$$

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x),\ g(x)=G(x)B(x)$

($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면

$$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$$
$$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$$ 이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$$
$$=2(x-2)(x+1)\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

18. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 이차식의 합을 구하면?

① $2x^2-1$　② $2x^2-2$　③ $2x^2-3$

④ $2x^2+1$　⑤ $2x^2+2$

해설

두 다항식은 $(x-1)a, (x-1)b$ (a, b는 서로소)

$x^3+x^2-2x=(x-1)ab=x(x+2)(x-1)$

두 다항식은 $x(x-1), (x+2)(x-1)$

$\therefore$두식의 합은 $2x^2-2$

19. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=Ga, B=Gb$(a, b는 서로소)

$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$

$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$

$\therefore\ G=x+2$

20. 다항식 $f(x)=x^4+ax^2+x+2$를 $g(x)=x^3+bx+2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x+2$일 때, ab의 값은?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$에서
$g(x)$ 와 $R(x)$의 최대공약수 $x+2$ 는
$f(x)$ 와 $g(x)$의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2)=16+4a=0, a=-4$
$g(-2)=-8-2b+2=0, b=-3$
$\therefore\ ab=12$

21. $a^2 = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$$\begin{aligned} P &= \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta \\ &= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n \\ &= 4(4-3)^n = 4 \end{aligned}$$

22. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에 주어진 수를 대입하여

$(ab+bc+ca)$의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$\therefore\ a=b=c=2$이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

23. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 18-1^2\times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

24. 어떤 일차식 $g(x)$에 대하여
$x^4+2x^3-3x^2-g(x)=\{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2$가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\
&= \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2 \\
&= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\
&+ \{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\
&= x^4+2x^3-3x^2-g(x)
\end{aligned}
$$

$g(x)$가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

25. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b,1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1,0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0 \quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

26. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$　② 0　③ $3^{2007}+1$
④ 1　⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

27. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡

④ ㉠,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$

$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$

$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면

$f(-1)+g(-1)=0 \cdots$ ①

$f(-1)-g(-1)=2 \cdots$ ②

①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$

보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.

㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$

㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$

㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$

$\therefore$ ㉠, ㉡

28. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8　　② -8　　③ 12　　④ -12　　⑤ 16

해설

$$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots ①$$
$$= (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots ②$$
$$= (x-c)(x-a)R(x) \cdots ③$$

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a + 2$, ③ 에서
$f(a) = 0$
$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b + 2$, ② 에서
$f(-b) = b + 4$
$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c + 4$, ③ 에서
$f(c) = 0$
$\Rightarrow c = 4$

$\therefore abc = 8$

29. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　　② 9　　③ 13　　④ 17　　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$

$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$

$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,

$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

30. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

31. a, b, c가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

32. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998 \times 9999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$= a+1 = 10000$$

33. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에

$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$

$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로

$x-1$을 인수로 가져야 한다.

$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0$, $a=-1$

34. 두 다항식 x^2+3x+p, x^2+px+q의 최소공배수가 $x^3-13x+12$일 때, $p+q$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$x^3-13x+12=(x-1)(x-3)(x+4)$ 두 다항식의 곱이 4차식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.
$(\because\ AB=GL)$
ⅰ) G.C.M. $=x-1$이면 $p=-4,\ q=3$
이 때 두 식은 $(x-1)(x+4)$, $(x-1)(x-3)$이므로 조건에 맞는다.
ⅱ) G.C.M. $=x-3$이면 $p=-18,\ q=45$
이 때 두 식은 $(x-3)(x+6)$, $(x-3)(x-15)$이므로 조건에 맞지 않는다.
ⅲ) G.C.M. $=x+4$일 때도 ⅱ)와 같음
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $p+q=-1$

35. x^8을 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$이고, $q_1(x)$를 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$일 때, $\frac{r_2}{r_1}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 16 ④ 21 ⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1} \cdots\cdots ①$

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2} \cdots\cdots ②$

①에서 $x=2$를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8,\ r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \dfrac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \dfrac{x^8 - 2^8}{x-2}$

$= (x^7 + 2x^6 + \cdots + 2^7)$

②에서 $x=2$를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2},\ r_2 = \{q_1(2)\}^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore\ r_2 = 2^{20}$

따라서, $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

36. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$　　② $3x-2$　　③ $3x+2$

④ x^2-2x+1　　⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3B(x)+x^2-x+6 \\ &= (x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2 \\ &= (x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2 \end{aligned}$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2 \end{aligned}$$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$