

1. 중심의 좌표가 (3, 4) 이고 x 축에 접하는 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP}$ 의 최댓값은? (단, O 는 원점)

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 9

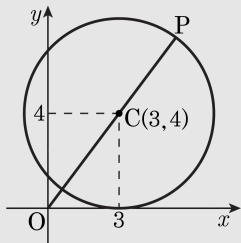
해설

이 원의 방정식은 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$

다음 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하면
원점과 중심을 지나는 직선이 원과 만나
는

두 점 중 한 점을 P 라 할 때,
 $\overline{OP}$ 가 최대이다.

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} + 4 = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$$



2. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 $(0, 0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 은 중심이 $(3, -4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} > 1 + r$$

$$5 > 1 + r$$

$$\therefore 0 < r < 4$$

따라서, 자연수 r 은 1, 2, 3 으로 모두 3 개이다.

4. 점 A(0, a)에서 원 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은 ?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을 $y = mx + a$ 로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서 접선 $mx - y + a = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,

$$(a - 3)^2 = 8(m^2 + 1)$$

$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a - 7)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

해설

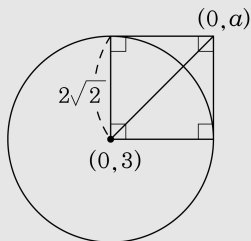
원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는

반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0 + (a - 3)^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$$a - 3 = \pm 4$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = -1$$

그런데 $a > 0$ 에서 $a = 7$



5. 두 점 $A(-2, 2)$, $B(3, 4)$ 가 있다. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 임의의 두 점을 P , Q 라 할 때, $\overline{AP}$ 의 최댓값과 $\overline{BQ}$ 의 최솟값의 합은 ?

① 3

② $2 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 2\sqrt{2}$

④ $4 + 2\sqrt{2}$

⑤ 7

해설

그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{AP}$ 는 최대가되고 $\overline{BQ}$ 는 최소가 된다.

$\therefore \overline{AP} = \text{반지름의 길이} + \text{원의 중심과 } A \text{ 까지의 거리}$

$$= 2 + \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$\overline{BQ} = \text{원의 중심과 } B \text{ 까지의 거리} - \text{반지름의 길이}$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} - 2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$\therefore$ 구하는 답은 $(2 + 2\sqrt{2}) + 3 = 5 + 2\sqrt{2}$

