1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1,\ B = \sqrt{3} + 2,\ C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　② $A < B < C$　③ $A < C < B$
④ $B < A < C$　⑤ $B < C < A$

해설

ⅰ) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ⅱ) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

ⅲ) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

2. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ② $\sqrt{2(a+b)} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$ ④ $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

$12=2a+3b\ge 2\sqrt{6ab}$

$6\ge\sqrt{6ab},\ 36\ge 6ab\quad \therefore 6\ge ab$

4. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2,\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

5. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

6. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$ ② $R < Q < P$ ③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$ ⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0$ $\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0$ $\therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

7. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \dfrac{c}{b-a}$, $B = \dfrac{a}{b-c}$, $C = \dfrac{b}{a-c}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < C < A$

④ $B < A < C$　　⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$ 에서

$b-a < 0,\ b-c > 0,\ a-c > 0$ 이므로

$A = \dfrac{c}{b-a} < 0,\ B = \dfrac{a}{b-c} > 0$

$C = \dfrac{b}{a-c} > 0$

$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c)-b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b)-c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$

$\therefore B > C$

따라서 $A < 0,\ B > C > 0$ 이므로

$B > C > A$ 이다.

8. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$　② $ab \ge 0$　③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \ge 0$, $|a + b| \ge 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \ge 0, ||a + b| \ge 0$ 이므로 $(|a| + |b|)^2$, $|a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다. $(|a| + |b|)^2 - \ |a + b|^2$ $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$ $= a^2 + [가] + b^2 - (a^2 + [나] + b^2)$ $= 2([다]) \ge 0$ (단, 등호는 [라] ≥ 0일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \ge 0$
(단, 등호는 $ab \ge 0$일때성립)

10. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \le 3^{3n}$
④ $2^{4n} \ge 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$\dfrac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\dfrac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\dfrac{16}{27}\right)^n < 1$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

11. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$　　② $xy > 0$　　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

12. $x>0, y>0$ 일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$

산술기하조건을 사용하면

$xy+\frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times4=32$

13. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$

$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$

14. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \dfrac{1}{x^2}>0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\dfrac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$
등호는 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$
따라서 양의 실수 x는 1이다.
최솟값은 3이고, x값은 1이다.

15. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x = a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$\dfrac{x^2+2x+2}{x} = x+2+\dfrac{2}{x}$

$x+\dfrac{2}{x}+2 \geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}+2 = 2\sqrt{2}+2$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b = 2\sqrt{2}+2$

등호는 $x = \sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1 = -2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1 = 3$

16. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

17. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

18. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답: ______개

▷ 정답: 2개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2개이다.

19. 부등식 $7^{20} < n^{10}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50이다.

20. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

21. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.
㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$
㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. (반례) $x = 2,\ y = -3$ 일 때, $4 < 9$ $\therefore$ 거짓

㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 \geq xy$

$\therefore$ 참

㉢. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x - y > 0,\ x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$

$\therefore x^3 - y^3 > 0,\ x^3 > y^3$

$\therefore$ 참

22. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$　　㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참
㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓
㉢ [반례] $x = 0$, $y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

23. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A=\frac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\frac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$　② $A \geq H \geq G$　③ $A \geq G \geq H$
④ $H \geq G \geq A$　⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$
$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠
$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$
$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$
$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

24. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(나)^2}{2}$ 이므로
부등식 $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$　② $\geq,\ a - b,\ a = b = 0$
③ $>,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a = b$　④ $>,\ a - b,\ a = b$
⑤ $\geq,\ \sqrt{a} - \sqrt{b},\ a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$

$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

(가) , (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로

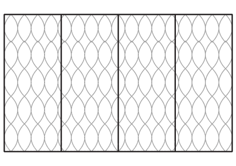
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$에서

등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$일 때이므로

등호는 $a = b$일 때 성립한다.

25. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면
$2a + 5b = 60$
$a,\ b$는 양수이므로
$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$
양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$
$\therefore\ ab \leq 90$
한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$이므로
$S = ab \leq 90$
따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

26. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$ ㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

27. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \ge (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \ge (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \le x+3y \le 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$

28. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로
$\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$
(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)
따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

29. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

30. a, b, c, d, x, y, z가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

ㄱ $a^2 + b^2 \geq ab$

ㄴ $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$

ㄷ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$

ㄹ $|a + b| \leq |a| + |b|$

ㅁ $|a| - |b| \geq |a - b|$

ㅂ $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㄱ

▷ 정답 : ㄹ

▷ 정답 : ㅂ

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

ㄱ $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$

$= (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 \geq ab$: 맞음

ㄴ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$

$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$: 틀림

ㄷ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$

$= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$

$+b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 +$

$2abxy + 2bcyz + 2cazx)$

$= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$: 틀림

ㄹ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= a^2 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0(\because\ |ab| \geq ab)$

$\therefore\ |a| + |b| \geq |a + b|$: 맞음

ㅁ 제곱의 차 비교

$(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$

$= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= -2|ab| + 2ab \leq 0(\because |ab| \geq ab)$

$\therefore\ |a| - |b| \leq |a - b|$: 틀림

ㅂ $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$

$= 2ab + 2|ab| \geq 0$

$\therefore\ |a + b| \geq |a| - |b|$: 맞음

31. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가)$\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

32. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x+2y \le 60 \cdots$ ㉠
$x>0,\ y>0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x+2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x+2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

33. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$
$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{M}{m}=3$