

1. 세 수  $A = 3\sqrt{3} - 1$ ,  $B = \sqrt{3} + 2$ ,  $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

①  $C < B < A$

②  $A < B < C$

③  $A < C < B$

④  $B < A < C$

⑤  $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned}\text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A\end{aligned}$$

따라서  $B < A < C$

2.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$  의 대소를 바르게 나타낸 것은?

①  $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

②  $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③  $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④  $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤  $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서  $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3.  $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수  $a, b$ 에 대하여  $ab$ 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, \quad 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$

4. 양의 실수  $a, b, c$  사이에 대하여  $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$  의 최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은  $3 + 2 + 1 = 6$

5.  $x, y$ 가 실수이고  $x^2 + y^2 = 10$  일 때  $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

### 해설

$x, y$ 가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

이 때,  $x^2 + y^2 = 10$  이므로

$$100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

(단, 등호는  $x = \frac{y}{3}$  일 때 성립)

따라서 최댓값은 10이다.

6.  $0 < a < 1$  일 때,  $P = \frac{1}{a}$ ,  $Q = \frac{1}{2-a}$ ,  $R = \frac{a}{2+a}$  의 대소 관계로 옳은 것은?

①  $P < R < Q$

②  $R < Q < P$

③  $Q < P < R$

④  $Q < R < P$

⑤  $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2-a > 0$ ,  $1-a > 0$  이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉,  $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a-2 < 0$ ,  $a+1 > 0$  이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉,  $P > R$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} &= \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)} \\ &= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)} \end{aligned}$$

이 때  $2-a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a^2-a+2 > 0$  이므로  $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$  따라서,  $P > Q > R$ 이다.

7.  $a > b > c > 0$  일 때,  $A = \frac{c}{b-a}$ ,  $B = \frac{a}{b-c}$ ,  $C = \frac{b}{a-c}$  의 대소를  
바르게 비교한 것은?

①  $A < B < C$

②  $A < C < B$

③  $B < C < A$

④  $B < A < C$

⑤  $C < A < B$

### 해설

$a > b > c > 0$ 에서

$b - a < 0$ ,  $b - c > 0$ ,  $a - c > 0$ 이므로

$$A = \frac{c}{b-a} < 0, B = \frac{a}{b-c} > 0$$

$$C = \frac{b}{a-c} > 0$$

$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$

$$\therefore B > C$$

따라서  $A < 0$ ,  $B > C > 0$ 이므로

$B > C > A$ 이다.

8. 실수  $a, b$  에 대하여 다음 중  $|a - b| > |a| - |b|$  가 성립할 필요충분조건인 것은?

①  $ab \leq 0$

②  $ab \geq 0$

③  $a + b \geq 0$

④  $ab < 0$

⑤  $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$  에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

$a$  와  $b$  가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서  $ab < 0$

9. 다음은 임의의 실수  $a, b$ 에 대하여  $|a| + |b| \geq 0$ ,  $|a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라]에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$  이므로  $(|a| + |b|)^2, |a + b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$   
 ② 가:  $|ab|$ , 나:  $ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$   
 ③ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $|ab| - ab$ , 라:  $ab$   
 ④ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $ab$   
 ⑤ 가:  $2|ab|$ , 나:  $2ab$ , 다:  $2|ab| - 2ab$ , 라:  $2ab$

### 해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

10. 자연수  $n$  에 대하여  $2^{4n}$ ,  $3^{3n}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $2^{4n} < 3^{3n}$

②  $2^{4n} > 3^{3n}$

③  $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④  $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤  $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

11. 부등식  $|x + y| \leq |x| + |y|$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

①  $x = y$

②  $xy > 0$

③  $xy \geq 0$

④  $x \geq 0, y \geq 0$

⑤  $x \leq 0, y \leq 0$

### 해설

$|x + y| = |x| + |y|$  의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

( i )  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

( ii ) 또  $xy > 0$  이면  $x, y$  는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$  이면 등호가 성립한다.

따라서,  $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

( i ), ( ii )에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

12.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right)$  의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3 \left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2 \sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

13.  $a, b$ 가 양수일 때,  $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

$a, b$ 가 양수이므로,  $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

14.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$ ,  $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

15. 양수  $x$ 에 대하여  $\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$ 는  $x = a$ 에서 최솟값  $b$ 를 가질 때,  
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

### 해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이  $2\sqrt{2} + 2$ 이므로  $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로  $a = \sqrt{2}$

$$\text{따라서 } -2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$$

16. 실수  $a, b, x, y$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중  $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

### 해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$5 \times 3 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$$

따라서 4는  $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

17.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고,  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

18. 부등식  $2^{50} > 5^{10n}$  을 만족하는 자연수  $n$  의 갯수를 구하여라.

▶ 답 :      개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

$$\text{이 때 } 2^{50} > 5^{10n} \text{ 이므로 } \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2$$

$n$  의 갯수는 2 개이다.

19. 부등식  $7^{20} < n^{10}$  을 만족시키는 자연수  $n$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수  $n$  의 최솟값은 50 이다.

20. 실수  $x, y$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠  $|x| + |y| \geq |x + y|$

㉡  $|x + y| \geq |x - y|$

㉢  $|x - y| \geq |x| - |y|$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠  $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ (반례)  $x = 1, y = -1$  일 때

$|1 + (-1)| = 0, |1 - (-1)| = 2$  이므로

$|x + y| < |x - y|$

㉢  $|x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$

$\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

21. 실수  $x, y$  에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠  $x > y$  이면,  $x^2 > y^2$  이다.

㉡  $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢  $x > y$  이면  $x^3 > y^3$  이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠. (반례)  $x = 2, y = -3$  일 때,  $4 < 9 \quad \therefore$  거짓

㉡.  $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 \geq xy$

$\therefore$  참

㉢.  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$

$\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$

$\therefore$  참

22. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단,  $x, y$  는 실수)

보기

㉠  $x^2 \geq 0$

㉡  $x^3 \geq 0$

㉢  $|x| + |y| > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다.  $\therefore$  참

㉡ [반례]  $x = -1$  일 때,  $x^3 < 0 \therefore$  거짓

㉢ [반례]  $x = 0, y = 0$  일 때,  $|x| + |y| = 0 \therefore$  거짓

23. 임의의 양의 실수  $x, y$ 에 대하여  $A = \frac{x+y}{2}$ ,  $G = \sqrt{xy}$ ,  $H = \frac{2xy}{x+y}$  라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $G \geq A \geq H$

②  $A \geq H \geq G$

③  $A \geq G \geq H$

④  $H \geq G \geq A$

⑤  $H \geq A \geq G$

해설

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\therefore A \geq G \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$$

$$\therefore G \geq H \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\Gamma}$ ,  $\textcircled{\text{L}}$ 에 의하여  $A \geq G \geq H$

24.  $a \geq 0, b \geq 0$  일 때,  $\frac{a+b}{2}$  (가)  $\sqrt{ab}$  임을 다음과 같은 과정으로 증명하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\text{나})^2}{2} \text{이므로}$$

부등식  $\frac{a+b}{2}$  (가)  $\sqrt{ab}$  이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

①  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

②  $\geq, a - b, a = b = 0$

③  $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

④  $>, a - b, a = b$

⑤  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$$\left( \sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

(가), (나)의 결과에서  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$  이므로

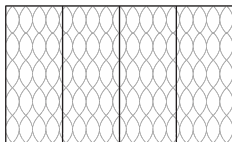
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(다)  $\left( \sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 \geq 0$  에서

등호가 성립할 때는  $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$  일 때이므로

등호는  $a = b$  일 때 성립한다.

25. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



①  $60\text{m}^2$

②  $70\text{m}^2$

③  $80\text{m}^2$

④  $90\text{m}^2$

⑤  $100\text{m}^2$

### 해설

전체 직사각형의 가로를  $a$ , 세로를  $b$ 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

$a, b$ 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면  $40ab \leq 60^2$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는  $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은  $90(\text{m}^2)$

26. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로 길이를 합한 값은?

①  $2\sqrt{2}$

② 4

③  $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤  $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를  $x$ , 높이를  $y$ 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{7}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는  $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는  $x^2 = y^2$  즉  $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를  $\textcircled{7}$ 에 대입하면  $x^2 = 8$

따라서  $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

27. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

28. 실수  $a, b$  에 대하여  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$a, b$ 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2 \text{에서}$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는  $a = b$  일 때 성립)

따라서  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$  의 최댓값은 2이다.

29.  $x, y$  가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠  $x + 1 > 0$

㉡  $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

㉢  $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉣  $|x + y| \geq |x - y|$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠  $x > -1$  일 때만 성립한다.

㉡  $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는  $x = y = 0$  일 때 성립)

㉢  $(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$   
 $= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$   
 $= 2(|xy| + xy) \geq 0$

$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$

(단, 등호는  $xy \leq 0$  일 때 성립)

㉣ (반례)  $x = 2, y = -3$  일 때

$|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$  이므로

$|x + y| < |x - y|$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

30.  $a, b, c, d, x, y, z$ 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

㉠  $a^2 + b^2 \geq ab$

㉡  $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$

㉢  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$

㉣  $|a + b| \leq |a| + |b|$

㉤  $|a| - |b| \geq |a - b|$

㉥  $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉣

▶ 정답 : ㉥

#### 해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠  $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$

$= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 \geq ab$ : 맞음

㉡  $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$

$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$

$\therefore a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$ : 틀림

㉢  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$

$= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$

$+ b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$

$= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$

$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ : 틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0 (\because |ab| \geq ab)$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ : 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$

$= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= -2|ab| + 2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$

$\therefore |a| - |b| \leq |a - b|$ : 틀림

㉥  $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$

$= 2ab + 2|ab| \geq 0$

$\therefore |a + b| \geq |a| - |b|$ : 맞음

31. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수  $a, b, H$ 에 대하여

적당한 실수  $r$ 가 존재하여

$$a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A) \text{가 성립한다고 하자.}$$

그러면  $a \neq b$ 이고  $\frac{a-H}{a} = (가) \cdots (B)$ 이므로

$H = (나)$ 이다.

역으로,  $a \neq b$ 인 양수  $a, b$ 에 대하여

$H = (나)$ 이면,

식 (B)가 성립하고  $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.

(B)에서  $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면

식 (A)가 성립한다. 따라서 양수  $a, b, H$ 에 대하여 적당한 실수  $r$ 이 존재하여

식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은

$a \neq b$ 이고  $H = (나)$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

①  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$

②  $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$

③  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$

④  $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$

⑤  $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$$a = H + \frac{a}{r} \text{에서 } \frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$$

$$H = b + \frac{b}{r} \text{에서 } \frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$$

$$\therefore \frac{a-H}{a} = (가) \frac{H-b}{b}$$

$$ab - bH = aH - ab \text{이므로 } H = (나) \frac{2ab}{a+b}$$

따라서 (다) 필요충분조건

32. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은  $x$ 분씩 늘어나며  $y$ 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한  $xy$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은  $10x$ ,  
 $y$ 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은  $2y$ 분이다.

시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서  $xy$ 의 최댓값은 45이다.

33.  $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 을 만족하는 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x$ 가 취할 수 있는 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

### 해설

$$x + y + z = 4 \text{에서 } y + z = 4 - x \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{에서 } y^2 + z^2 = 6 - x^2 \cdots \textcircled{㉡}$$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2$$

(단, 등호는  $y = z$  일 때 성립)

①, ②을 대입하면

$$2(6 - x^2) \geq (4 - x)^2, 3x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$(3x - 2)(x - 2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

$$\text{따라서 } M = 2, m = \frac{2}{3} \text{이므로 } \frac{M}{m} = 3$$