

1. x, y 에 관한 연립방정식
- $$\begin{cases} kx + (1 - k)y = 2k + 1 \\ akx + (k + 1)y = b + 4k \end{cases} \quad \text{가 } k \text{의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도}$$
- 록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?
- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$kx + (1 - k)y = 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
$$akx + (k + 1)y = b + 4k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{1} \text{에서 } (x - y - 2)k + (y - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x - y - 2 = 0, y - 1 = 0$$
$$\therefore x = 3, y = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$
$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 정리하면}$$
$$(3a - 3)k + (1 - b) = 0$$
$$\therefore a = 1, b = 1$$
$$\therefore a + b = 2$$

2. 실수 a 가 $0 < a < 2$ 이고, x, y 가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases} \quad \text{을 만족시킬 때,}$$

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 & \cdots \textcircled{㉠} \\ ax - y = a^3 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉡}$ 에서 $y = ax - a^3 \quad \cdots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉢}$ 식을 $\textcircled{㉠}$ 식에 대입하면 $4x - a(ax - a^3) = 16$

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore x = 4 + a^2 \quad (\because a \neq \pm 2)$

$\therefore y = a(4 + a^2) - a^3 = 4a$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= a + 2 - (a - 2) \\ &\quad (\because 0 < a < 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a , b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$ 이다.
 $a + b = 70$, $1.2a + 1.25b = 86$
연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$

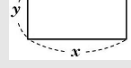
4. 가로, 세로의 길이가 각각 x cm, y cm 인 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하여라. (단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, \quad 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 을 풀면 $x = \alpha, y = \beta$

또는 $x = \gamma, y = \delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x - y = -2$, 즉 $y = x + 2$

$\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1, -2$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = -2, y = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 6$$

6. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x = -1, y = 2$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1$$

7. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면
 $(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
 $(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
 $260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라고 하면 근과 계수와의 관계에서
 $(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $\alpha = m - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
 $\therefore m = 10$

8. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

9. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

10. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 일때
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서
 $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50} 으로 묶으면
 $\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0이다.

11. $x^3 + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ 일 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -3

해설

α, β, γ 는 방정식
 $x^3 + 1 = 0$ 의 세 근이므로
 $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = -1$
 $\therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3$

12. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$m = -1, 7$$

13. $x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}$

를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

- ① $x^3 - ax^2 - 1 = 0$
- ② $x^3 - ax^2 + 1 = 0$
- ③ $x^3 + ax^2 - 1 = 0$
- ④ $x^3 + ax^2 + 1 = 0$
- ⑤ $x^3 + ax - 1 = 0$

해설

$x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로
근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha + \beta + \gamma = 0,$

$a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -1$

$\therefore \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}$

같은 방법으로 $\frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$

$\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$

$\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)$

$= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = a$

$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$

$= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0$

$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$

따라서, 구하는 삼차방정식은

$x^3 - ax^2 - 1 = 0$ 이다.

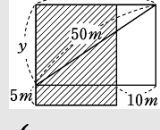
14. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

► m

▷ 정답: 48m

애니메이션

저음 식사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\text{m}$, $y\text{m}$ 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{㉑} \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots \textcircled{㉒} \end{cases}$$

㉔을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore x = 2y + 20 \dots \textcircled{c}$
 $\textcircled{c}$ 을 $\textcircled{b}$ 에 대입하면

$$(200 + 20)^2 + \dots^2 = 5$$

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉔에 대입하면 $x = 48$

15. $\frac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6$ 을 만족시키는 자연수 x, y 값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답: 개

▷ 정답 : 2개

해설

$$\frac{x^2 - y^2 - 1}{x - y} = 6 \text{ 에서}$$

$$\frac{(x-y)(x+y)-1}{x-y} = (x+y) + \frac{-1}{x-y} = 6$$

$x-y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x - y = 1$ 일 때, $x + y = 7$

$$\therefore x = 4, y = 3$$

ii) $x - y = -1$ 일 때, $x + y = 5$

$$\therefore x = 2 \quad y = 3$$

$\therefore x = 2, y = 3$
따라서 구하는 (x, y) 은 $(4, 2), (2, 3)$ 이므로

따라서 구
2 개이다.