1. x, y에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} kx + (1-k)y = 2k+1 \\ akx + (k+1)y = b+4k \end{cases}$$

가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$kx + (1-k)y = 2k+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$akx + (k+1)y = b+4k \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $(x-y-2)k + (y-1) = 0$

$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$

$\therefore\ x=3,\ y=1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(3a-3)k + (1-b) = 0$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

2. 실수 a가 $0 < a < 2$이고, x, y가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases}$$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 & \cdots ㉠ \\ ax - y = a^3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y = ax - a^3 \quad \cdots$ ㉢

㉢식을 ㉠식에 대입하면 $4x - a(ax - a^3) = 16$

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore\ x = 4 + a^2\ (\because\ a \neq \pm 2)$

$\therefore\ y = a(4 + a^2) - a^3 = 4a$

$$\begin{aligned} \therefore\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= a + 2 - (a - 2) \\ &\quad (\because\ 0 < a < 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$증가하였고, B제품은 $25\,\%$증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

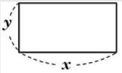
4. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots ㉠$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore \ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore \ xy = 11 \times 6 = 66$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

6. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

7. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

8. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

9. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore\ 2+c=5,\ 4+2c=a,\ 10-c=b$

$\therefore\ a=10,\ b=7,\ c=3$

10. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

11. $x^3 + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 일 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -1　　⑤ -3

해설

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식

$x^3 + 1 = 0$의 세 근이므로

$\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = -1$

$\therefore\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3$

12. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

13. $x^3+ax+1=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2},\ \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2},\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

① $x^3-ax^2-1=0$　② $x^3-ax^2+1=0$
③ $x^3+ax^2-1=0$　④ $x^3+ax^2+1=0$
⑤ $x^3+ax-1=0$

해설

$x^3+ax+1=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta+\gamma=0$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$$\therefore\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha}$$

같은 방법으로 $\frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}=-\frac{\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\beta}$,

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma}$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(-\frac{1}{\beta}\right)+\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$$
$$=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=a$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)+\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right)+\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=0$$
$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right)=-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

따라서, 구하는 삼차방정식은
$x^3-ax^2-1=0$ 이다.

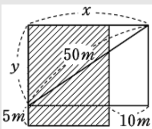
14. 대각선의 길이가 $50\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 $5\,\mathrm{m}$ 늘리고, 가로를 $10\,\mathrm{m}$ 줄이면 넓이가 $50\,\mathrm{m}^2$ 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\,\mathrm{m}$, $y\,\mathrm{m}$ 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

15. $\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$값의 순서쌍의 개수는?

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 2 개

해설

$\dfrac{x^2-y^2-1}{x-y}=6$ 에서

$\dfrac{(x-y)(x+y)-1}{x-y}=(x+y)+\dfrac{-1}{x-y}=6$

$x-y$ 는 -1 의 약수이다. 즉 -1 또는 1

i) $x-y=1$ 일 때, $x+y=7$

$\therefore\ x=4,\ y=3$

ii) $x-y=-1$ 일 때, $x+y=5$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

따라서 구하는 $(x,\ y)=(4,\ 3),\ (2,\ 3)$ 이므로

2 개이다.