1. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$ 이 $x = 1$ 일 때 최솟값 5 를 가진다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

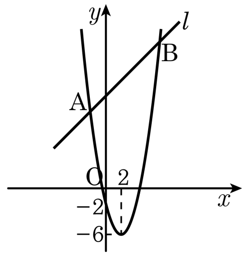
해설

$$y = ax^2 + bx + 6$$
$$= a(x-1)^2 + 5$$
$(\because x = 1$일 때, 최솟값 5를 가진다.$)$
$$= a(x^2 - 2x + 1) + 5$$
$$= ax^2 - 2ax + a + 5$$
$\therefore\ a + 5 = 6,\ \ -2a = b$

$\therefore\ a = 1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = 1 + (-2) = -1$

2. 다음 그림은 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 그래프가 직선 l 과 두 점 $\mathrm{A}(m,\ 10)$, $\mathrm{B}(7,\ n)$ 에서 만날 때, 직선 l 의 방정식을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x + 12$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(2,\ -6)$, y 절편이 -2 이므로

$y = a(x-2)^2 - 6$ 에 $(0,\ -2)$ 를 대입하면

$-2 = 4a - 6$, $a = 1$ 이다.

$y = (x-2)^2 - 6$ 에 $\mathrm{A}(m,\ 10)$, $\mathrm{B}(7,\ n)$ 을 대입하면

(i) $10 = (m-2)^2 - 6$

$(m-2)^2 = 16$, $m - 2 = \pm 4$

$m < 0$ 이므로 $m = -2$, $\mathrm{A}(-2,\ 10)$

(ii) $n = 25 - 6 = 19$, $\mathrm{B}(7,\ 19)$

직선의 기울기는 $\dfrac{10-19}{-2-7} = 1$

$y = x + p$ 에 $(-2,\ 10)$ 을 대입하면

$10 = -2 + p$, $p = 12$ $\quad \therefore\ y = x + 12$

3. 이차함수$y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = -x^2 + 2x + 10$$
$$= -(x-1)^2 + 11 \text{에서 } M = 11$$
$$y = 3x^2 + 6x - 5$$
$$= 3(x+1)^2 - 8 \text{에서 } m = -8$$
$$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$$

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$ 에서 만나고 최댓값이 8 일 때, a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = -4$

▷ 정답 : $c = 6$

해설

$$\begin{aligned} y &= a(x+3)(x-1) \\ &= a(x^2+2x-3) \\ &= a(x+1)^2 - 4a \end{aligned}$$

$-4a = 8$ 이므로 $a = -2$

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2+2x-3) \\ &= -2x^2 - 4x + 6 \end{aligned}$$

$\therefore\ b = -4,\ c = 6$

5. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 값의 범위가 $x < -5$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

주어진 조건에서 그래프의 축의 방정식은 $x = -5$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11 \\ &= -\frac{1}{2}(x+5)^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 11 \end{aligned}$$

$\therefore\ k = -5$

6. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

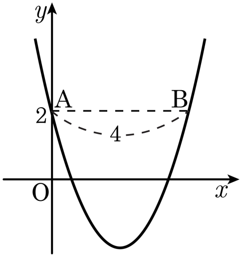
▷ **정답 :** -49

해설

두 수를 x, $x+14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y=x(x+14)=x^2+14x=(x+7)^2-49$

따라서 $x=-7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

7. 다음 그림은 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프이다. $\overline{\mathrm{AB}} = 4$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $\overline{\mathrm{AB}}$ 는 x 축과 평행하다.)



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -4$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

B 의 좌표가 (4, 2) 이므로 A(0, 2), B(4, 2) 를 각각 대입하면
$2 = b, 2 = 16 + 4a + b$,
즉 $a = -4, b = 2$ 이다.

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0, 2), (1, b+5), (-1, 4a-1)$ 을 지날 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면

$a = 3,\ b = -6,\ c = 2$

$\therefore a + b + c = 3 - 6 + 2 = -1$

9. 이차함수 $y = x^2 + mx + m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

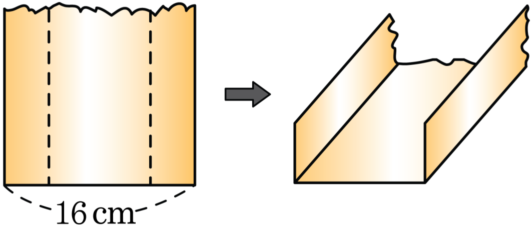
$$y = x^2 + mx + m = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m$$

최솟값 $M = -\frac{m^2}{4} + m$

$$M = -\frac{m^2}{4} + m = -\frac{1}{4}(m-2)^2 + 1$$

$m = 2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.

10. 다음 그림과 같이 너비가 16cm 인 철판의 양쪽을 접어 직사각형인 물받이를 만들었다. 단면의 넓이를 최대가 되게 하는 높이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4 cm

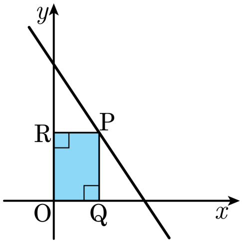
해설

높이를 $x$cm, 넓이를 $y$cm^2 라고 두면

$$
\begin{aligned}
y &= x(16-2x) \\
&= -2x^2+16x \\
&= -2(x^2-8x+16)+32 \\
&= -2(x-4)^2+32
\end{aligned}
$$
이다.

따라서 $x=4$ 일 때, 최댓값 32 를 가진다.

11. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

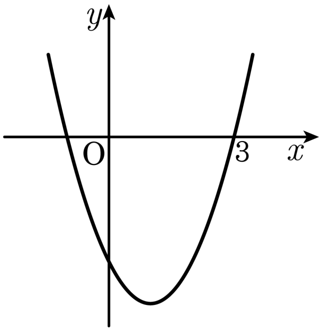
$$\begin{aligned}\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\ =-\frac{3}{2}a^2+3a\\ =-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

12. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 - 2x - 3$ 의 그래프이다. 이 함수의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = ax^2 - 2x - 3$ 이 점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로 $0 = 9a - 6 - 3$, $a = 1$
$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$
$x = 1$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

13. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

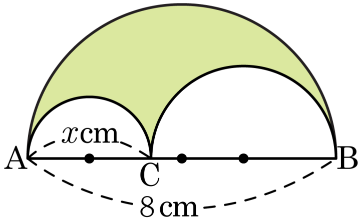
▷ 정답 : 1

해설

$x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. $y = a(x-2)^2 - 2$. 또한 최솟값이 존재하므로, $a > 0$ 이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로, y 절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서 y 절편$= 4a - 2 \geq 0$, $a \geq \dfrac{1}{2}$ 이므로 a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수는 1 이다.

14. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \mathrm{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8-x)\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

15. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 6 초

▷ 정답 : 240 m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x-6)^2 + 240$

따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.