

1. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$
따라서, $a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$

2. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
 접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.
 직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식
 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{(가)}$ = 0
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
 $D = 0$ 에서
 $k = \pm \boxed{(나)}$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm \boxed{(나)}$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$ ② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$
 ③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$ ④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
 ⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에
 대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
 $\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$
 원과 직선이 접하므로 $D = 0$,
 즉 $r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 $\therefore (가) : k^2 - r^2, (나) : r\sqrt{m^2 + 1}$

4. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$

④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$$

$$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$$

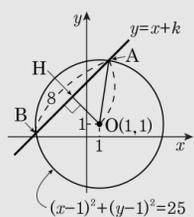
5. 직선 $y = x + k$ 가 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 와 만나서 생기는 현의 길이가 8일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $-3\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(1, 1)$ 에서 직선 $x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$



직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \dots \text{㉠}$$

또 원의 중심 $O(1, 1)$ 에서

직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리가 \overline{OH} 이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$