**1.** 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 $a$, $b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-8$

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식은

$4x-2y=20 \quad \therefore\ y=2x-10$

따라서, $a=2,\ b=-10 \quad \therefore\ a+b=2-10=-8$

**2.** 점$(2,\ 1)$ 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① $1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $4$ ⑤ $\sqrt{5}$

**해설**

원의 반지름 $r$ 은 점 $(2,\ 1)$ 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

**3.** 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 $m$ 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 $m$ 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(가)}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(나)}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(나)}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$

② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$

④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$

⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 $D$ 라 하면,
$$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$$
원과 직선이 접하므로 $D=0$ ,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : $k^2-r^2$, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

**4.** 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 $m$ 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$
③ $-2 < m < 2$
④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
⑤ $-4 < m < 4$

**해설**

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

**5.** 직선 $y = x + k$가 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$와 만나서 생기는 현의 길이가 8 일 때, 상수 $k$의 값은?

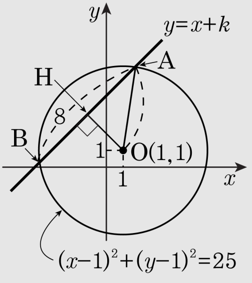
① $2\sqrt{3}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $-3\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O(1, 1)에서 직선 $x - y + k = 0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$




직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \cdots ㉠$$

또 원의 중심 O(1, 1)에서

직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리가 $\overline{OH}$이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$

$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$