1. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2\ :\ 3$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 $2:\ 3$으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\dfrac{134}{5}$　② $-\dfrac{116}{5}$　③ $\dfrac{134}{5}$　④ $\dfrac{116}{5}$　⑤ 20

해설

$$\mathrm{P}\ (a,\ b) = \left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3}, \frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$

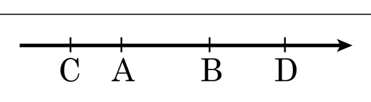
$$= \left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$

$$\mathrm{Q}\ (c,\ d) = \left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3}, \frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$

$$= (-3,\ -23)$$

$$\therefore\ a+b+c+d = \frac{9}{5}+1-3-23 = -\frac{116}{5}$$

2. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은
i) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,
ii) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

외분점을 P 라고 하면
$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ 이므로
$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,
$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

3. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q이기 위한 필요조건, r 은 q이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분
③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.
⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

4. $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a$, $y=b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

$y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

$=\dfrac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}\quad a+b=2$

5. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad a=2$

6. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ 을 평행이동하여 원 $x^2+y^2=c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $c=5$

해설

원 $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ 을

표준형으로 바꾸면 $(x+2)^2+(y-3)^2=5$

$\therefore\ c=5$

7. 집합 A 에 대하여 $x \in A$ 이면, $5 - x \in A$ 이다. 집합 A 의 원소가 모두 자연수일 때, 가능한 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

집합 A 는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$ 의 순서쌍을 원소로 갖고 $\varnothing$ 은 갖지 않는 집합이므로
$2^2 - 1 = 3$ (개)

8. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

㉠ $p : a \ge b,\ q : a^2 \ge b^2$

㉡ $p : a + b \le 2,\ q : a \le 1$ 또는 $b \le 1$

㉢ $p : |a - b| = |a| - |b|,\ q : (a - b)\,b \ge 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉡, ㉢

해설

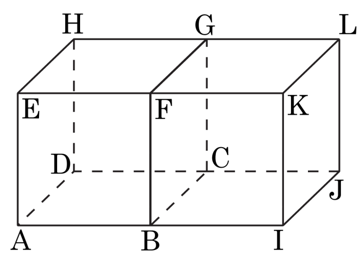
$p \to q$ 가 참이고 $q \to p$ 가 거짓인 것을 찾는다.

㉠ $a \ge b \to a^2 \ge b^2$(거짓), 반례 : $a = -1, b = -2$
$a^2 \ge b^2 \to a \ge b$ (거짓), 반례: $a = -4, b = 3$

㉡ $a + b \le 2 \to a \le 1$ 또는$b \le 1$ (참), $a \le 1$ 또는 $b \le 1 \to$ $a + b \le 2$(거짓), 반례 : $a = 0, b = 3$

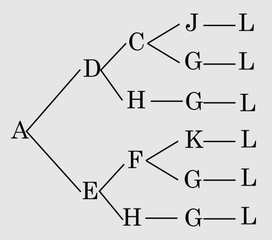
㉢ $|a - b| = |a| - |b| \leftrightarrow (a - b)b \ge 0$
p, q 모두 $a \ge b$, $b \ge 0$ 또는 $a \le b$, $b \le 0$이므로 필요충분조건이다.

9. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

10. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e를 늘어 놓으면, a, e는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\, b\, \square\, c\, \square\, d\, \square\, f\, \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 a, e를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

11. 그림과 같은 직사각형의 틀에 숫자 1, 1, 2, 3을 제 1행의 각 칸에 1개씩 나열하고 제 2행에도 숫자 1, 1, 2, 3 을 각 칸에 1개씩 나열할 때, 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 경우의 수는?

1행				
2행				

① 15 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

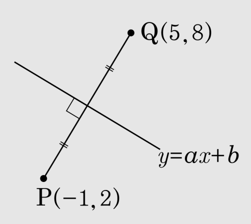
숫자 1, 1, 2, 3을 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 방법의 수는 (1 2), (1 3), (2 1), (3 1)을 일렬로 나열하는 방법의 수와 일치하므로 $4! = 24$

12. 두 점 P$(-1,\ 2)$, Q$(5,\ 8)$ 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점이 $y = ax + b$ 위에 있으므로,



$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 :

$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{2+8}{2}\right) = (2,\ 5)$

$\therefore\ 5 = 2a + b$

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 기울기 : $\dfrac{2-8}{-1-5} = 1$

$\therefore\ a = -1$

위 식에 대입하면 : $b = 7$

$\therefore\ a + b = -1 + 7 = 6$

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots,\ 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4 의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, n 의 값을 구하여라.

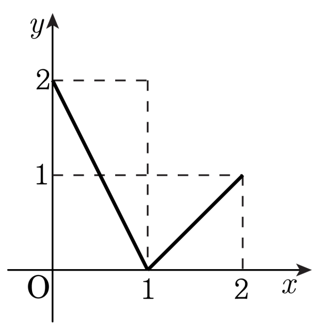
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4 의 약수 : 1, 2, 4
집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수는
$2^{n+1-3} = 64 = 2^6$ 이다.
$n + 1 - 3 = 6 \qquad \therefore\ n = 8$

14. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



$f \circ f = f^2,\ f \circ f^2 = f^3,\ \cdots,\ f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

그림에서

$f(x) = \begin{cases} -2x+2\ (0 \le x \le 1) \\ x-1 (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이므로,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f(\frac{1}{3}) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

$\vdots$

$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

15. 다음 중 지나지 않는 사분면이 같은 것끼리 짝지은 것은?

㉠ $y=\dfrac{1}{x-2}-1$	㉡ $y=\dfrac{4}{x+2}-1$
㉢ $y=\dfrac{2}{x-3}-1$	㉣ $y=\dfrac{-2}{x-1}+1$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠, ㉢는 제2사분면을 지나지 않는다.
㉡는 모든 사분면을 지난다.
㉣는 제3사분면을 지나지 않는다.

16. $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 7

해설

$x = \sqrt{2} + 1,\ (x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$ 에서

$x^2 - 2x - 1 = 0$

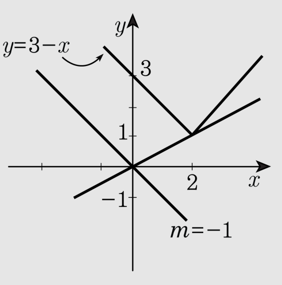
$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2) + 3 \\ &= 0 \times (x^2 + 2) + 3 = 3\end{aligned}$$

17. $y = |x-2|+1$, $y = mx$에 대해 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않을 때, m 의 값의 범위는?

① $-1 < m < \frac{1}{2}$　② $-1 \le m < \frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2} < m < 1$

④ $-\frac{1}{2} \le m < 1$　⑤ $-\frac{1}{2} \le m < 0$

해설



A : $y = |x-2|+1$

B : $y = mx$ 라고 하면

A : $x \ge 2 \rightarrow y = x-1$

$x < 2 \rightarrow y = 3-x$

B : $y = mx$가 점 $(2,\ 1)$을 지날 때 보다

아래에 있으므로 $1 > 2m \rightarrow m < \frac{1}{2}$

$y = mx$ 의 기울기 $m \ge -1$ 이어야 하므로

$\therefore\ -1 \le m < \frac{1}{2}$

18. 전체집합의 세 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 15\text{의 약수}\}$, $C = \{x|x\text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n((A-B) \cup (A-C) \cup (B-C))$ 를 구하면?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $C = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$
$A - B = \{2,\ 6\}$, $B - C = \{3, 5, 15\}$, $A - C = \{3,\ 6\}$
$\therefore\ (A-B) \cup (A-C) \cup (B-C) = \{2, 6\} \cup \{3, 6\} \cup \{3, 5, 15\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 15\}$
따라서 $n((A-B) \cup (A-C) \cup (B-C)) = 5$

19. 두 조건 p, q를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a+1\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \le -2\right\}$에 대하여 $p \to q$를 참이 되게하는 실수 a의 최댓값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(i) $x < 0$이면

$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \le 0$

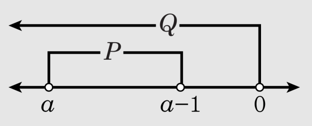
$\therefore \quad x + \frac{1}{x} \le -2$

(ii) $x > 0$이면

$x + \frac{1}{x} \ge 2$이므로 Q를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x \mid x < 0\}$

$\therefore \quad P \subset Q$에서 $a + 1 \le 0$, $a \le -1$



따라서, $p \to q$를 참이 되게 하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

20. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x , y 에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x)$, $g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1)=4$)

① $g(xy)=g(x)+g(y)$
② $g(xy)=g(x)+g(y)+1$
③ $g(xy)=g(x)g(y)$
④ $g(xy)=g(x)g(y)+1$
⑤ $g(xy)=2g(x)g(y)$

해설

$g(x)=a$, $g(y)=b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x=f(a)$, $y=f(b)$

$xy=f(a)f(b)=2f(a+b)$

$\therefore\ \dfrac{xy}{2}=f(a+b)$

$\therefore\ g\left(\dfrac{xy}{2}\right)=a+b=g(x)+g(y)$

그런데 $g(xy)=g(x)+g(2y)=g(x)+g(y)+g(4)$

$f(1)=4$ 이므로 $g(4)=1$

$\therefore\ g(xy)=g(x)+g(y)+1$