

1. 두 점 $A(1, -3)$, $B(3, 7)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점 $P(a, b)$ 와 2: 3으로 외분하는 점 $Q(c, d)$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은?

① $-\frac{134}{5}$

② $-\frac{116}{5}$

③ $\frac{134}{5}$

④ $\frac{116}{5}$

⑤ 20

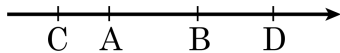
해설

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 1}{2 + 3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times (-3)}{2 + 3} \right) \\ &= \left(\frac{9}{5}, 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(c, d) &= \left(\frac{2 \times 3 - 3 \times 1}{2 - 3}, \frac{2 \times 7 - 3 \times (-3)}{2 - 3} \right) \\ &= (-3, -23) \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c + d = \frac{9}{5} + 1 - 3 - 23 = -\frac{116}{5}$$

2. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m, n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 $m : n$ 으로 외분하는 점은

- i) m () n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,
- ii) m () n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : >

▷ 정답 : <

해설

외분점을 P 라고 하면

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \text{ 이므로}$$

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

3. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

4. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a$, $y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

5. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$$\therefore \text{삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$$

6. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $c = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을

표준형으로 바꾸면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

$\therefore c = 5$

7. 집합 A 에 대하여 $x \in A$ 이면, $5 - x \in A$ 이다. 집합 A 의 원소가 모두 자연수일 때, 가능한 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

집합 A 는 $(1, 4)$, $(2, 3)$ 의 순서쌍을 원소로 갖고 $\emptyset$ 은 갖지 않는 집합이므로

$$2^2 - 1 = 3 \text{ (개)}$$

8. 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 보기 중에서 모두 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

㉠ $p : a \geq b, q : a^2 \geq b^2$

㉡ $p : a + b \leq 2, q : a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$

㉢ $p : |a - b| = |a| - |b|, q : (a - b)b \geq 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

$p \rightarrow q$ 가 참이고 $q \rightarrow p$ 가 거짓인 것을 찾는다.

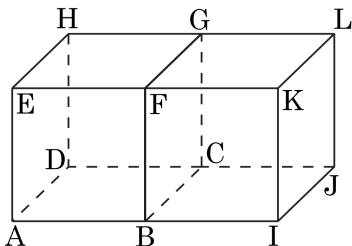
㉠ $a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$ (거짓), 반례 : $a = -1, b = -2$
 $a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$ (거짓), 반례 : $a = -4, b = 3$

㉡ $a + b \leq 2 \rightarrow a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$ (참), $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1 \rightarrow a + b \leq 2$ (거짓), 반례 : $a = 0, b = 3$

㉢ $|a - b| = |a| - |b| \leftrightarrow (a - b)b \geq 0$

p, q 모두 $a \geq b, b \geq 0$ 또는 $a \leq b, b \leq 0$ 이므로 필요충분조건이다.

9. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



① 4

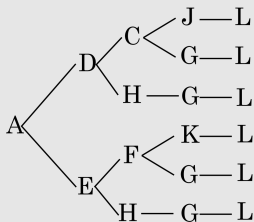
② 6

③ 8

④ 12

⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

10. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f 를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e 가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.

이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e 를 늘어놓으면, a, e 는 이웃할 수 없다.

즉, $\square b \square c \square d \square f \square$ 의 다섯 개의 $\square$ 중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.

따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5 P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

11. 그림과 같은 직사각형의 틀에 숫자 1, 1, 2, 3을 제 1행의 각 칸에 1개씩 나열하고 제 2행에도 숫자 1, 1, 2, 3을 각 칸에 1개씩 나열할 때, 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 경우의 수는?

1행				
2행				

① 15

② 18

③ 20

④ 22

⑤ 24

해설

숫자 1, 1, 2, 3을 같은 열에는 같은 숫자가 들어가지 않게 나열하는 방법의 수는 (1 2), (1 3), (2 1), (3 1)을 일렬로 나열하는 방법의 수와 일치하므로 $4! = 24$

12. 두 점 $P(-1, 2)$, $Q(5, 8)$ 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값은?

① 10

② 9

③ 8

④ 7

⑤ 6

해설

$\overline{PQ}$ 의 중점이 $y = ax + b$ 위에 있으므로,

$\overline{PQ}$ 의 중점 :

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+8}{2} \right) = (2, 5)$$

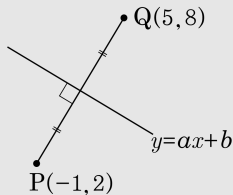
$$\therefore 5 = 2a + b$$

$$\overline{PQ} \text{ 기울기} : \frac{2-8}{-1-5} = 1$$

$$\therefore a = -1$$

$$\text{위 식에 대입하면} : b = 7$$

$$\therefore a + b = -1 + 7 = 6$$



13. 집합 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

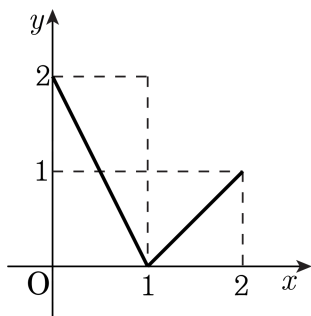
4의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n+1-3} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$n + 1 - 3 = 6 \quad \therefore n = 8$$

14. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



$f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3$, $\dots$, $f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

그림에서

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (0 \leq x \leq 1) \\ x - 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad \text{이므로,}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

15. 다음 중 지나지 않는 사분면이 같은 것끼리 짝지은 것은?

$$\textcircled{\text{㉠}} y = \frac{1}{x-2} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}} y = \frac{4}{x+2} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉢}} y = \frac{2}{x-3} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉣}} y = \frac{-2}{x-1} + 1$$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠, ㉢는 제2사분면을 지나지 않는다.

㉡는 모든 사분면을 지난다.

㉣는 제3사분면을 지나지 않는다.

16. $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 7

해설

$$x = \sqrt{2} + 1, (x - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(\text{준식}) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2) + 3$$

$$= 0 \times (x^2 + 2) + 3 = 3$$

17. $y = |x - 2| + 1$, $y = mx$ 에 대해 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 존재하지 않을 때, m 의 값의 범위는?

① $-1 < m < \frac{1}{2}$

② $-1 \leq m < \frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{2} < m < 1$

④ $-\frac{1}{2} \leq m < 1$

⑤ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$

해설

$A : y = |x - 2| + 1$

$B : y = mx$ 라고 하면

$A : x \geq 2 \rightarrow y = x - 1$

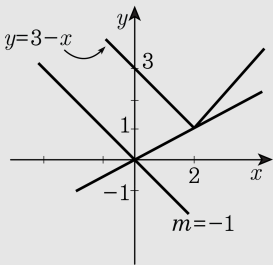
$x < 2 \rightarrow y = 3 - x$

$B : y = mx$ 가 점 $(2, 1)$ 을 지날 때
보다

아래에 있으므로 $1 > 2m \rightarrow m < \frac{1}{2}$

$y = mx$ 의 기울기 $m \geq -1$ 이어야 하므로

$\therefore -1 \leq m < \frac{1}{2}$



18. 전체 집합의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 16 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C))$ 를 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 3, 5, 15\}, C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$A - B = \{2, 6\}, B - C = \{3, 5, 15\}, A - C = \{3, 6\}$$

$$\therefore (A - B) \cup (A - C) \cup (B - C) = \{2, 6\} \cup \{3, 6\} \cup \{3, 5, 15\} = \{2, 3, 5, 6, 15\}$$

$$\text{따라서 } n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)) = 5$$

19. 두 조건 p, q 를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a + 1\}$, $Q = \left\{x \mid x + \frac{1}{x} \leq -2\right\}$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(i) $x < 0$ 이면

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0$$

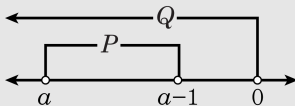
$$\therefore x + \frac{1}{x} \leq -2$$

(ii) $x > 0$ 이면

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ 이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x \mid x < 0\}$

$\therefore P \subset Q$ 에서 $a + 1 \leq 0$, $a \leq -1$



따라서, $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은 -1이다.

20. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x), g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1) = 4$)

① $g(xy) = g(x) + g(y)$

② $g(xy) = g(x) + g(y) + 1$

③ $g(xy) = g(x)g(y)$

④ $g(xy) = g(x)g(y) + 1$

⑤ $g(xy) = 2g(x)g(y)$

해설

$g(x) = a, g(y) = b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x = f(a), y = f(b)$

$$xy = f(a)f(b) = 2f(a+b)$$

$$\therefore \frac{xy}{2} = f(a+b)$$

$$\therefore g\left(\frac{xy}{2}\right) = a+b = g(x) + g(y)$$

$$\text{그런데 } g(xy) = g(x) + g(2y) = g(x) + g(y) + g(4)$$

$$f(1) = 4 \text{ 이므로 } g(4) = 1$$

$$\therefore g(xy) = g(x) + g(y) + 1$$