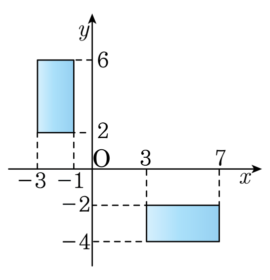
1. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.
따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$ 이므로
직선 AB 의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)}=-1$

2. 두 직선 $kx+2y+3=0$, $2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
y절편은 달라야 한다.
$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4}$ $\therefore$ $k^2=4$
따라서 양수 k의 값은 2이다.

3. $-1 < a < 2$일 때, $\sqrt{(a-2)^2} + |a+1|$을 간단히 하면?

① 3 ② -3 ③ $2a-1$
④ $2a+1$ ⑤ $-2a+1$

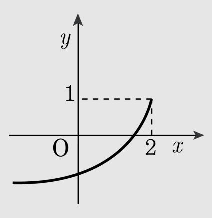
해설
$$\begin{aligned}\sqrt{(a-2)^2} + |a+1| &= |a-2| + |a+1| \\ &= -(a-2) + a + 1 = 3\end{aligned}$$

4. 좌표평면에서 무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

① 제 1사분면　② 제 2사분면
③ 제 3사분면　④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

5. 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② -9 ③ $-\frac{4}{9}$ ④ -3 ⑤ -2

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x-3y+6=0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a+6|}{5}$ 이고,
점$P(0,\ a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,
$|-3a+6|=5|a|$, $-3a+6=\pm 5a$
$\therefore\ a=\frac{3}{4}$ 또는 -3
$\therefore\ a=-3\ \ (\because\ a<0)$

6. 직선 $(a-1)x-(a-2)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
따라서 원의 중심 $(1,2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1)\times 1-(a-2)\times 2-1=0$
$\therefore\ a=2$

7. 점 $A(2, 4)$ 와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$x = \frac{2+a}{2}$, $y = \frac{4+b}{2}$

$\therefore a = 2(x-1)$, $b = 2(y-2)$ $\cdots$ ㉠

이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$

$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 1$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \doteq 2\pi$

8. 두 점 A$(-6,\ 1)$, B$(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서
$\dfrac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$
$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

9. 수정이네 반 학생 40 명 중에서 강아지를 키우는 학생은 24 명, 고양이를 키우는 학생은 16 명이고, 고양이만 키우는 학생은 13 명이다. 이때, 고양이도 강아지도 키우지 않는 학생 수는?

① 3 명 ② 5 명 ③ 7 명 ④ 9 명 ⑤ 11 명

해설

수정이네 반 학생들의 모임을 전체집합 U, 강아지를 키우는 학생들의 모임을 집합 A, 고양이를 키우는 학생들의 모임을 집합 B 라 하면, 고양이만 키우는 학생들의 모임은 $B-A$ 이고, 고양이도 강아지도 키우지 않는 학생들의 모임은 $A^C \cap B^C$ 이다.

$n(U) = 40,\ n(A) = 24,\ n(B) = 16$

$n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - n(A \cap B) = 13$

$n(A \cap B) = 3$

$$\begin{aligned} n(A^C \cap B^C) &= n((A \cup B)^C) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 40 - (24 + 16 - 3) = 3(\text{명}) \end{aligned}$$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=5$, $f(f(x))=x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5　② -3　③ $\frac{1}{3}$　④ 3　⑤ 5

해설

$f(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$
$\therefore f(3)=f^{-1}(3)=5$

11. 유리수 $x,\ y$가 $(x-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-y)=4\sqrt{2}$를 만족시킬 때 x^3+y^3의 값은?

① 45　② 56　③ 48　④ 37　⑤ 26

해설

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{2}x - xy - 8 + 2\sqrt{2}y = 4\sqrt{2}\\
&-xy - 8 + (2x+2y-4)\sqrt{2} = 0\\
&xy = -8,\ x+y = 2\\
&\therefore x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)\\
&\qquad\qquad = 2^3 - 3\cdot(-8)\cdot 2 = 56
\end{aligned}
$$

12. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n(\{x|x$는 $\boxed{}$미만의 자연수$\}) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{b,\ c,\ d\}) = \boxed{}$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는 $\boxed{}$ 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n(\{x|x$는 5 미만의 자연수$\}) = 4$
㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d) - n(\{b,\ c,\ d\}) = 1$
㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ 의 3 개
$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳지 않은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.

㉡ $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

㉢ $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.

㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠$B \subset A$ 이면$n(B) \leq n(A)$ 이다.
㉢$A = \{\phi\}$ 이면$n(A) = 1$ 이다.
㉣$U^C = \phi$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤$A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

14. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　② $a \leq -1$　③ $a > -1$

④ $a < 1$　⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,
$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$
$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.
즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$
$\therefore\ a < 1$

15. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ _9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$

16. 6 권의 서로 다른 책을 2 개, 2 개, 2 개로 나누어서 3 개의 서로 다른 가방 A, B, C 에 담을 때, 특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 30 가지

해설

특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담아야 하므로 나머지 5 개의 책을 가방 A 에 1 개, 가방 B 에 2 개, 가방 C 에 2 개를 나누어 담으면 된다.
따라서, 구하는 경우의 수는
${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 30$ (가지)

17. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를

(1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x,\ 0,\ x\}$

(2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\frac{3}{x},\ 1,\ \frac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.

두 집합 $A = \{x | x\text{는 }2\text{의 배수}\}$, $B = \{x | x\text{는 }3\text{의 배수}\}$ 일 때, $n((A-B)[2] \cup (B-A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x | x\text{ 는 }2\text{ 의 배수}\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots\}$
,
$B = \{x | x\text{ 는 }3\text{ 의 배수}\} = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ \cdots\}$,
$2 \in A - B$ 이므로 $(A-B)[2] = \{-2,\ 0,\ 2\}$ 이고,

$6 \notin B - A$ 이므로 $(B-A)[6] = \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이다.

따라서 $(A-B)[2] \cup (B-A)[6] = \left\{-2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이고 $n((A-B)[2] \cup (B-A)[6]) = 5$

18. a, b가 양의 실수일 때, $a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. A, B에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$　　② $3+\sqrt{2},\ 1$　　③ $3,\ \frac{1}{2}$
④ $4,\ \frac{1}{2}$　　⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a\cdot 4b}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{4}$

따라서, $a=1,\ b=\frac{1}{4}$일 때 $a+4b+\frac{1}{\sqrt{ab}}=4$

19. x, y는 양수이고 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=3$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$x+y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot (x+y)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{y}\right)(x+y)$

$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\right)\geq\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)$

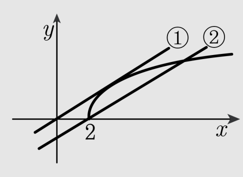
$=\frac{1}{3}(10+8)=6$

20. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x + a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a값의 범위를 정하면?

① $-2 \le a < 0$　　② $-1 \le a < 0$　　③ $-2 \le a < -1$

④ $-1 \le a < 1$　　⑤ $0 \le a < 1$

해설



그림처럼 ①,② 사이에 있어야 교점이 두 개다.

① 접할 때

$\frac{1}{2}x + a = \sqrt{2x-4}$

$x^2 + 4(a-2)x + 4a^2 + 16 = 0$

$\frac{D}{4} = 2^2(a-2)^2 - 4a^2 - 16 = 0, \therefore a = 0$

② 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$0 = \frac{1}{2} \times 2 + a \quad \therefore\ a = -1$

$-1 \le a < 0$