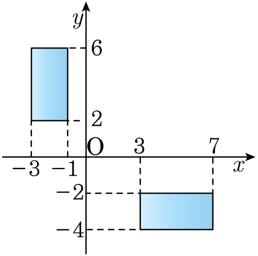
1. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.
따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$이므로
직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)}=-1$

2. 두 직선 $kx+2y+3=0$, $2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고
y절편은 달라야 한다.

$$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4} \quad \therefore\ k^2=4$$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

3. $-1 < a < 2$일 때, $\sqrt{(a-2)^2} + |a+1|$을 간단히 하면?

① 3　　② -3　　③ $2a-1$

④ $2a+1$　　⑤ $-2a+1$

해설

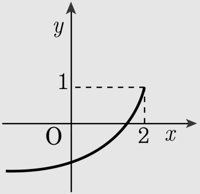
$$\begin{aligned}\sqrt{(a-2)^2} + |a+1| &= |a-2| + |a+1| \\ &= -(a-2) + a + 1 = 3\end{aligned}$$

4. 좌표평면에서 무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

① 제 1사분면
② 제 2사분면
③ 제 3사분면
④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은
제 2사분면이다.

5. 점 $P(0,a)$ 에서 직선 $y=\frac{4}{3}x+2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의값은?

① $-\frac{3}{4}$　② -9　③ $-\frac{4}{9}$　④ -3　⑤ -2

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x-3y+6=0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a+6|}{5}$ 이고,

점$P(0,\ a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,

$|-3a+6|=5|a|$, $-3a+6=\pm 5a$

$\therefore\ a=\frac{3}{4}$ 또는 -3

$\therefore\ a=-3\ \ (\because\ a<0)$

6. 직선 $(a-1)x-(a-2)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

따라서 원의 중심 $(1,2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1)\times 1-(a-2)\times 2-1=0$

$\therefore\ a=2$

7. 점 $A(2,4)$와 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a,b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x,y)$라 하면

$$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a=2(x-1),\ b=2(y-2) \quad \cdots ㉠$$

이 때 $P(a,b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2-4a-2b+1=0 \quad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$$

$$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$$

$$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)=1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi≒2\pi$

8. 두 점 A$(-6,\ 1)$, B$(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서

$$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$$

$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

9. 수정이네 반 학생 40명 중에서 강아지를 키우는 학생은 24명, 고양이를 키우는 학생은 16명이고, 고양이만 키우는 학생은 13명이다. 이때, 고양이도 강아지도 키우지 않는 학생 수는?

① 3명 ② 5명 ③ 7명 ④ 9명 ⑤ 11명

해설

수정이네 반 학생들의 모임을 전체집합 U, 강아지를 키우는 학생들의 모임을 집합 A, 고양이를 키우는 학생들의 모임을 집합 B라 하면, 고양이만 키우는 학생들의 모임은 $B-A$이고, 고양이도 강아지도 키우지 않는 학생들의 모임은 $A^C \cap B^C$이다.

$n(U)=40,\ n(A)=24,\ n(B)=16$

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=16-n(A\cap B)=13$

$n(A\cap B)=3$

$$
\begin{aligned}
n(A^C \cap B^C) &= n((A\cup B)^C) \\
&= n(U)-n(A\cup B) \\
&= 40-(24+16-3)=3(\text{명})
\end{aligned}
$$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=5$, $f(f(x))=x$ 일 때 $f(3)$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)=5$

11. 유리수 x, y가 $(x-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-y)=4\sqrt{2}$를 만족시킬 때 x^3+y^3의 값은?

① 45 ② 56 ③ 48 ④ 37 ⑤ 26

해설

$2\sqrt{2}x-xy-8+2\sqrt{2}y=4\sqrt{2}$

$-xy-8+(2x+2y-4)\sqrt{2}=0$

$xy=-8,\ \ x+y=2$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)\\ &= 2^3-3\cdot(-8)\cdot 2=56\end{aligned}$$

12. 다음 $\square$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n(\{x|x$는 $\square$미만의 자연수$\}) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{b,\ c,\ d\}) = \square$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A의 개수는 $\square$ 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n(\{x|x$는 5 미만의 자연수$\}) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d) - n(\{b,\ c,\ d\}) = 1$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}$ 의 3 개

$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.

㉡ $(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

㉢ $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

㉣ U^c 은 모든 집합의 부분집합이다.

㉤ $A - B = B - A$ 이면 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠$B \subset A$ 이면$n(B) \leq n(A)$ 이다.
㉢$A = \{\phi\}$ 이면$n(A) = 1$ 이다.
㉣$U^C = \phi$ 은 모든 집합의 부분집합이다.
㉤$A - B = B - A$ 이면 $A = B$ 이므로 $(A \cup B) \subset B$ 이다.

14. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \le -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

15. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$

16. 6 권의 서로 다른 책을 2 개, 2 개, 2 개로 나누어서 3 개의 서로 다른 가방 A, B, C 에 담을 때, 특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담는 방법의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 30 가지

해설

특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담아야 하므로 나머지 5 개의 책을 가방 A 에 1 개, 가방 B 에 2 개, 가방 C 에 2 개를 나누어 담으면 된다.

따라서, 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 30$ (가지)

17. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를

(1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x,\ 0,\ x\}$

(2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\dfrac{3}{x},\ 1,\ \dfrac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.

두 집합 $A = \{x|x\text{는 }2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x\text{는 }3\text{의 배수}\}$ 일 때, $n((A-B)[2] \cup (B-A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x \text{ 는 } 2 \text{ 의 배수}\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots\}$
,
$B = \{x|x \text{ 는 } 3 \text{ 의 배수}\} = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ \cdots\}$,
$2 \in A - B$ 이므로 $(A-B)[2] = \{-2,\ 0,\ 2\}$ 이고,
$6 \notin B - A$ 이므로 $(B-A)[6] = \left\{\dfrac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이다.

따라서 $(A-B)[2] \cup (B-A)[6] = \left\{-2,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이고 $n((A-B)[2] \cup (B-A)[6]) = 5$

18. a, b가 양의 실수일 때, $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. A, B에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$　② $3+\sqrt{2},\ 1$　③ $3,\ \dfrac{1}{2}$

④ $4,\ \dfrac{1}{2}$　⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a\cdot 4b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

따라서, $a=1$, $b=\dfrac{1}{4}$일 때 $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$

19. $x,\ y$는 양수이고 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{y}=3$ 일 때, $x+y$의 최솟값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$x+y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{y}\right)(x+y)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\right)\geq\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(10+8)=6$$

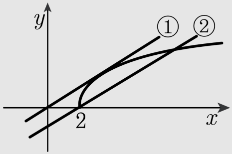
20. 곡선 $y=\sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a값의 범위를 정하면?

① $-2 \le a < 0$ ② $-1 \le a < 0$ ③ $-2 \le a < -1$

④ $-1 \le a < 1$ ⑤ $0 \le a < 1$

해설

그림처럼 ①,② 사이에 있어야 교점이 두 개다.



① 접할 때

$$\frac{1}{2}x+a=\sqrt{2x-4}$$

$$x^2+4(a-2)x+4a^2+16=0$$

$$\frac{D}{4}=2^2(a-2)^2-4a^2-16=0,\ \therefore a=0$$

② 점 $(2,0)$ 을 지날 때,

$$0=\frac{1}{2}\times 2+a \quad \therefore\ a=-1$$

$$-1 \le a < 0$$