1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점$(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
② $(x+1)^2+(y-2)^2=32$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=20$
④ $(x+1)^2+(y+2)^2=12$
⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면
$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로
$(3-1)^2+(-2-2)^2=r^2 \quad \therefore\ r^2=20$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=20$

2. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉠
ⅰ) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \cdots\cdots$ ㉡
ⅱ) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2} \quad (\because\ r > 0)$

3. 두 원 O_1, O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2 가 2, 5 일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다. ② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다. ④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

4. 두 원 $(x-2)^2+y^2=10$, $x^2+y^2+y-5=0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$(x-2)^2+y^2=10$ 에서
$x^2+y^2-4x-6=0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$
$4x+y+1=0, y=-4x-1$
$\therefore a=-4, b=-1$
$\therefore a+b=-4+(-1)=-5$

5. 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： -8

해설

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(4,-2)$에서의 접선의 방정식은
$4x-2y=20\quad\therefore\ y=2x-10$
따라서, $a=2,\ b=-10\quad\therefore\ a+b=2-10=-8$

6. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y=0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\frac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

7. 두 점 A(1, 2), B(−1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=4$　　② $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=4$　　④ $x^2+(y-3)^2=2$

⑤ $x^2+y^2=2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)=(0,\ 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$

8. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad)$, $k < (\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

9. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

10. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

11. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

12. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{2}x\pm1$ ② $y=-\sqrt{2}x\pm5$ ③ $y=-\sqrt{3}x\pm4$
④ $y=-\sqrt{3}x\pm9$ ⑤ $y=-\sqrt{5}x\pm6$

해설
구하는 접선의 방정식은
$y=\left(-\sqrt{3}\right)x\pm2\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$
$\therefore y=-\sqrt{3}x\pm4$

13. 점 (1, 1) 을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $\sqrt{6}$　　⑤ 4

해설

x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 (a, a) 로 나타낼 수 있다.
또한 반지름 역시 a 로 볼 수 있다.
따라서 (a, a) 를 중심으로 하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 이다.
점 $(1, 1)$ 은 이 원 위의 점이므로 등식을 만족시킨다.
따라서 $a = 2 \pm \sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.
두 점 사이의 거리 공식에 의해 두 원의 중심거리를 구하면
중심거리 d 는 $\sqrt{2((2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2}))^2} = 4$ 이다.

14. 실수 $a,\ b$ 와 두 원
A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,
B : $(x+1)^2+(y-1)^2=3$ 에 대하여
원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, $a,\ b$ 사이의 관계식은?

① $a+b=-3$ ② $a+b=-2$ ③ $a-b=-1$
④ $a^2+b^2=1$ ⑤ $a^2+b^2=2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(-1,\ 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a+1)x-(b+1)y=0\cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로
$(a+1)\times(-1)+(b+1)\times1=0$
$\therefore a+b=-2$

15. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,
반지름의 길이가 r 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2} > 1+r$
$5 > 1+r$
$\therefore 0 < r < 4$
따라서, 자연수 r 은 $1, 2, 3$ 으로 모두 3개이다.

16. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$　④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2$ ……㉠
$y=x+2$ ……㉡
에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+4(1-a)x+4=0$
$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$
㉠, ㉡이 많나지 않으려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$
$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서
직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면
$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-1<0$　$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

17. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

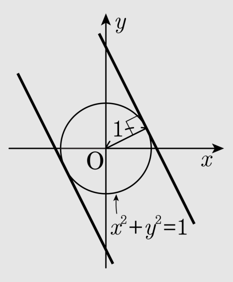
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로
점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

18. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로

$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$

$\Rightarrow x = -2, \ -8$

$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

19. 원 $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원이 x 축과 만나는 점은 $y=0$ 을 대입하여 계산한다.
$\Rightarrow$ $x^2-4x+3=0$
$\Rightarrow$ $x=1,\ 3$
$\therefore$ x 축 위의 선분의 길이 : 2

20. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 위의 점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax + by = 3$이 될 때, $a - b$의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 4

해설

공식 $x_1x + y_1y - 4 \cdot \dfrac{(x_1 + x)}{2} - 6 \cdot \dfrac{(y_1 + y)}{2} + 3 = 0$에 의해

$3x + 0 - 2x - 6 - 3y + 3 = 0$

$\rightarrow x - 3y = 3$이 된다.

$\therefore a = 1, \quad b = -3$

21. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

22. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

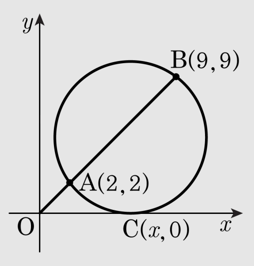
따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

23. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$　　② 5　　③ $\frac{11}{2}$　　④ 6　　⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

24. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2 ② 3 ③ 5

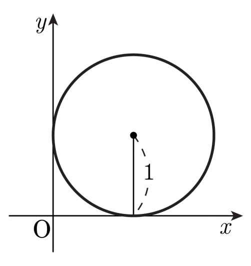
④ $5\sqrt{2}-5$ ⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

25. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$

$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$

$3k^2 - 12k + 8 = 0$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.