

1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

② $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

2. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{6}$

③ $\sqrt{7}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,
구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

i) $\textcircled{㉠}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

ii) $\textcircled{㉠}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{㉡} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

3. 두 원 O_1 , O_2 의 중심거리가 $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1 , r_2 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.

② 내접한다.

③ 두 점에서 만난다.

④ 만나지 않는다.

⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

4. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서

$x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로

두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$$

$$4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

5. 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$$

$$\text{따라서, } a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$$

6. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $C(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{a^2 + 4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $C\left(-\frac{a}{2}, 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2}$

$\therefore a = -2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

7. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2}$

$\therefore$ 원의 방정식 : $x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

8. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$$a = (\quad), k < (\quad)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

9. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$$

10. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$

그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

11. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$

② $2\sqrt{17}$

③ $5\sqrt{13}$

④ $3\sqrt{17}$

⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은

$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

12. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -\sqrt{2}x \pm 1$

② $y = -\sqrt{2}x \pm 5$

③ $y = -\sqrt{3}x \pm 4$

④ $y = -\sqrt{3}x \pm 9$

⑤ $y = -\sqrt{5}x \pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = (-\sqrt{3})x \pm 2\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x \pm 4$$

13. 점 $(1, 1)$ 을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다.
이때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{6}$

⑤ 4

해설

x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 (a, a) 로 나타낼 수 있다.

또한 반지름 역시 a 로 볼 수 있다.

따라서 (a, a) 를 중심으로 하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \text{ 이다.}$$

점 $(1, 1)$ 은 이 원 위의 점이므로 등식을 만족시킨다.

따라서 $a = 2 \pm \sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

두 점 사이의 거리 공식에 의해 두 원의 중심거리를 구하면

$$\text{중심거리 } d \text{ 는 } \sqrt{2((2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}))^2} = 4 \text{ 이다.}$$

14. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -3$

② $a + b = -2$

③ $a - b = -1$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $a^2 + b^2 = 2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(a + 1)x - (b + 1)y = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$(a + 1) \times (-1) + (b + 1) \times 1 = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$

15. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 $(0, 0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 은 중심이 $(3, -4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} > 1 + r$$

$$5 > 1 + r$$

$$\therefore 0 < r < 4$$

따라서, 자연수 r 은 1, 2, 3 으로 모두 3 개이다.

16. 원 $(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$ 과 직선 $y = x + 2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$

② $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$

③ $3 - \sqrt{2} < a < 3 + \sqrt{2}$

④ $4 - \sqrt{2} < a < 4 + \sqrt{2}$

⑤ $5 - \sqrt{2} < a < 5 + \sqrt{2}$

해설

$$(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$y = x + 2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2x^2 + 4(1 - a)x + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2(1 - a)x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (1 - a)^2 - 2 = a^2 - 2a - 1$$

㉠, ㉡이 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 1 < 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$$

(다른해설) 원의 중심 $(2a, 0)$ 에서

직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|2a - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|a + 1|$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\sqrt{2}|a + 1| = |2a|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 1 < 0 \quad \therefore 1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$$

17. $x^2 + y^2 = 1$ 일 때, $2x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

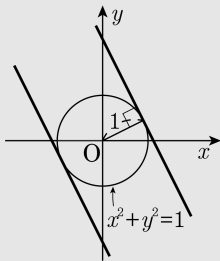
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x + y = k$ 라 하면 $y = -2x + k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.

주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로

점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1$

$\therefore -5 \leq k \leq \sqrt{5}$

18. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, -8$$

$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

19. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원이 x 축과 만나는 점은 $y = 0$ 을 대입하여 계산한다.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, 3$$

$\therefore x$ 축 위의 선분의 길이 : 2

20. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax + by = 3$ 이 될 때, $a - b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

공식 $x_1x + y_1y - 4 \cdot \frac{(x_1 + x)}{2} - 6 \cdot \frac{(y_1 + y)}{2} + 3 = 0$ 에 의해

$$3x + 0 - 2x - 6 - 3y + 3 = 0$$

$\rightarrow x - 3y = 3$ 이 된다.

$$\therefore a = 1, \quad b = -3$$

21. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, | -3m - 1 | = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

22. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을

표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로

중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.

원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에

이르는 거리의 최솟값은

$$d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

23. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 점점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

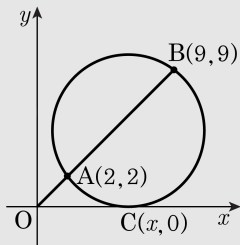
③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

24. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

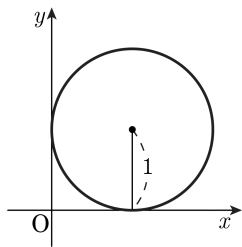
두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$$

25. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원래 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로
근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.