1. 두 원 A, B 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라고 할 때, $r_1 = 4r_2$ 이고, 원 A 의 넓이는 $256\pi\,\mathrm{cm}^2$ 이다. 원 B 의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

$r_1 = \sqrt{256} = 16\,\mathrm{cm}$ $\quad\therefore\ r_2 = 4\ (\mathrm{cm})$

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$ 이다.

② $a < 0$일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = a$

③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$ 이다.

④ $\sqrt{a^2} = |a|$ 이다.

⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = 3a$ 이다

해설

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-a)^2} = a$
② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2} = -(-a) = a$
③ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{16a^2} = 4a$
④ a 의 부호와 관계없이 $\sqrt{a^2} = |a|$
⑤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(3a)^2} = -3a$

3. $\frac{40^8}{100^4} = \sqrt{16^a}$, $\sqrt{\frac{9^8}{9^4}} = b$ 일 때, $10a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $10a - b = -1$

해설

$\frac{40^8}{100^4} = \sqrt{16^a}$,

$\frac{40^8}{100^4} = \frac{2^{24} \times 5^8}{2^8 \times 5^8} = 2^{16} = \sqrt{2^{32}} = \sqrt{16^8}$

$\therefore\ a = 8$

$\sqrt{\frac{9^8}{9^4}} = b$, $\sqrt{9^4} = 9^2 = 81$ $\quad \therefore\ b = 81$

$\therefore 10a - b = 80 - 81 = -1$

4. 두 실수 a, b 에 대하여 $a-b<0$, $ab<0$ 일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$ 을 간단히 한 것은?

① 0　　② $2a$　　③ $a-b$　　④ $2b$　　⑤ $a+b$

해설

$ab<0$ 이면 a와 b의 부호가 다르다.

$a-b<0$ 이면 $a<b$ 이므로 $a<0$, $b>0$ 이다.

$a<0$ 이므로 $\sqrt{a^2}=-a$, $b>0$ 이므로 $\sqrt{b^2}=b$

$a<0$ 이므로 $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=-a$

$b>0$ 이므로 $\sqrt{(-b)^2}=\sqrt{b^2}=b$

따라서

$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$

$=-a+b-(-a)+b$

$=2b$

5. $-1 < a < b < 0 < c$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(-b)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(-2c)^2} + \sqrt{4c^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2b+1$

해설

$-1 < a < b < 0 < c$에서

$a+1 > 0, -b > 0, a-b < 0, -2c < 0$

$\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(-b)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(-2c)^2} + \sqrt{4c^2}$

$= \sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(-b)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(-2c)^2} + \sqrt{(2c)^2}$

$= (a+1) - (-b) - (a-b) - 2c + 2c$

$= a+1+b-a+b-2c+2c$

$= 2b+1$

6. 1부터 9까지의 숫자가 적힌 카드가 한 장씩 있다. 이 카드 중에서 임의로 3장을 뽑을 때, $\sqrt{126abc}$ 가 자연수가 되는 경우는 모두 몇 가지인가?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sqrt{126abc} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 7 \times abc}$

$abc = 14$ 또는 $abc = 56$ 또는 $abc = 126$

$abc = 224$ 또는 $abc = 504$

$abc = 14$ 일 때, $(1, 2, 7)$

$abc = 56$ 일 때, $(1,\ 7,\ 8)$, $(2,\ 4,\ 7)$

$abc = 126$ 일 때, $(2,\ 7,\ 9)$, $(3,\ 6,\ 7)$

$abc = 224$ 일 때, $(4,\ 7,\ 8)$

$abc = 504$ 일 때, $(7,\ 8,\ 9)$

7. $2x-y=3$ 일 때, $\sqrt{2x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 두 자리 자연수 x 는?

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

해설

$2x-y=3 \Rightarrow y=2x-3$

$\sqrt{2x+y}=\sqrt{2x+2x-3}=\sqrt{4x-3}$

x 는 최소한 가장 작은 두자리 수인 10 이상이어야 하므로,

근호 안의 제곱수는 7^2 이상이 되어야 한다. ($\sqrt{4\times 10-3}=\sqrt{37}>7^2$)

$\therefore\ \sqrt{4x-3}=7$ 일 때, $x=13$ 이므로 성립한다.

$\therefore x=13$

8. $\sqrt{960-32a}$ 가 정수가 되도록 하는 자연수 a 중에서 가장 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m 이라고 할 때, $M-2m$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

$\sqrt{960-32a} = \sqrt{16(60-2a)} = 4\sqrt{60-2a}$

$60-2a=0$ 일 때, a 는 최대

$60-2a=36$ 일 때, a 는 최소

$M = \dfrac{60}{2} = 30,\ m = \dfrac{60-36}{2} = 12$

$M-2m = 30-2\times12 = 6$

9. 다음의 두 식 A, B에 대하여 $A+B$를 계산하여라.

$$\mathrm{A} = \sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}$$
$$B = \sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{2}-2\right)^2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$3 < \sqrt{10},\ 2 < 2\sqrt{2} < 3$

$A = -\left(3-\sqrt{10}\right) - \left(\sqrt{10}-3\right) = 0$

$B = \left(3-2\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2}-2\right) = 1$

$\therefore A + B = 0 + 1 = 1$

10. 부등식을 만족하는 정수 x 의 개수가 가장 많은 것을 골라라.

보기

㉠ $1 < \sqrt{|5-3x|} < 4$

㉡ $2 < \sqrt{|1-x|} < \sqrt{7}$

㉢ $-1 < \sqrt{|2x-3|} < 2$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $1 < \sqrt{|5-3x|} < 4$

각 변을 제곱하면 $1 < |5-3x| < 16$ 이므로

$5-3x \geq 0$ 일 때, $1 < 5-3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = -3, -2, -1, 0, 1$

$5-3x < 0$ 일 때, $1 < -5+3x < 16$ 이므로 이를 만족하는 $x = 3, 4, 5, 6$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 9 개이다.

㉡ $2 < \sqrt{|1-x|} < \sqrt{7}$

각 변을 제곱하면 $4 < |1-x| < 7$ 이므로

$1-x \geq 0$ 일 때, $4 < 1-x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = -5, \ -4$

$1-x < 0$ 일 때, $4 < -1+x < 7$ 이므로 이를 만족하는 $x = 6, \ 7$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 4 개이다.

㉢ $-1 < \sqrt{|2x-3|} < 2$

각 변을 제곱하면 $1 < |2x-3| < 4$이므로

$2x-3 \geq 0$일 때, $1 < 2x-3 < 4$이므로 이를 만족하는 $x = 3$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수는 모두 2개이다.

그러므로 답은 ㉠ 이다.

11. 다음 중 유리수는?

① $\sqrt{3}-3$ ② $-\sqrt{3.61}$ ③ $\frac{\pi}{5}$

④ $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\sqrt{9}$ 의 제곱근

해설

$$-\sqrt{3.61}=-\sqrt{\frac{361}{100}}=-\sqrt{\left(\frac{19}{10}\right)^2}=-\frac{19}{10}$$

12. a는 유리수, b는 무리수일 때, 다음 중 그 값이 항상 무리수인 것은?

① $\sqrt{a}+b$ ② $\frac{b}{a}$ ③ a^2-b^2

④ ab ⑤ $\frac{b}{\sqrt{a}}$

해설

① $a=2, b=-\sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ 이므로 유리수이다.
③ $b=\sqrt{2}$ 일 때, $b^2=2$ 이므로 a^2-b^2 는 유리수이다.
④ $a=0$ 일 때, $ab=0$ 이므로 유리수이다.
⑤ $a=2, b=\sqrt{8}$ 일 때, $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$ 이므로 유리수이다.

13. 다음 중 항상 성립하는 것은?

① (무리수) $+$ (유리수) $=$ (무리수)

② (무리수) $+$ (무리수) $=$ (무리수)

③ (무리수) $\times$ (무리수) $=$ (무리수)

④ (무리수) $\div$ (무리수) $=$ (무리수)

⑤ (유리수) $\times$ (무리수) $=$ (무리수)

해설

② $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$: 유리수
③ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$: 유리수
④ $\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$: 유리수
⑤ $0\times\sqrt{2}=0$: 유리수

14. 다음 중 옳은 것은?

① 유리수의 제곱근은 항상 무리수이다.

② 네 변의 길이가 무리수인 직사각형의 넓이는 항상 무리수이다.

③ 서로 다른 두 유리수의 곱은 항상 유리수이다.

④ 순환하지 않는 무한소수도 유리수일 수 있다.

⑤ 모든 유리수의 제곱근은 2 개이다.

해설

① 유리수 9 의 제곱근은 ± 3 으로 유리수이므로 옳지 않다.
② 가로, 세로의 길이가 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ 인 무리수인 직사각형의 넓이는 $\sqrt{36}=6$ 이 되어 유리수이므로 옳지 않다.
④ 순환하지 않는 무한소수는 모두 무리수이다.
⑤ 0 의 제곱근은 1 개, -1 의 제곱근은 0 개이므로 옳지 않다.
따라서 옳은 것을 고르면 ③ 이다.

15. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ 유리수 a 와 무리수 b 에 대해 $a-b$ 는 항상 무리수이다.

㉡ $b=a-\sqrt{5}$ 를 만족시키는 무리수 a, b 가 항상 존재한다.

㉢ 임의의 무리수 a 에 대하여 $ab=1$ 을 만족시키는 무리수 b 가 존재한다.

㉣ 유리수 a , 무리수 b 에 대해 ab 는 항상 무리수이다.

㉤ 임의의 유리수 a 에 대해 ab^2 이 유리수가 되는 무리수 b 는 존재하지 않는다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

㉣ $a=0$ 일 경우 $ab=0$ 이 되어 유리수가 되므로 옳지 않다.
㉤ $a=2$ 일 때, $b=\sqrt{2}$ 이면 $ab^2=2\cdot(\sqrt{2})^2=4$가 되어 유리수가 되므로 옳지 않다.
따라서 옳지 않은 것을 모두 고르면 ㉣, ㉤ 이다.

16. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 두 유리수 $\frac{1}{5}$ 과 $\frac{1}{3}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

② 두 무리수 $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{6}$ 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

③ $\sqrt{5}$ 에 가장 가까운 유리수는 2 이다.

④ 서로 다른 두 유리수의 합은 반드시 유리수이지만, 서로 다른 두 무리수의 합 또한 반드시 무리수이다.

⑤ 실수와 수직선 위의 점 사이에는 일대일 대응이 이루어진다.

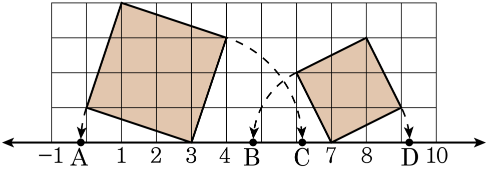
해설

③ $\sqrt{4}$와 $\sqrt{5}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재 한다.

④ 두 무리수를 더해 유리수가 될 수도 있다.

예) $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

17. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때. $a+b+c+d$ 값은? (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



① 10 ② 13 ③ 17 ④ 20 ⑤ 24

해설

$a = 3 - \sqrt{10}$, $b = 7 - \sqrt{5}$, $c = 3 + \sqrt{10}$, $d = 7 + \sqrt{5}$
이므로 $a+b+c+d = 20$ 이다.

18. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① 순환하는 무한소수는 반드시 유리수이다.

② 서로 다른 두 무리수 사이에는 적어도 하나 이상의 자연수가 존재한다.

③ 반지름의 길이가 0 이 아닌 실수인 원의 넓이는 반드시 무리수이다.

④ 완전제곱수의 제곱근은 항상 유리수이다.

⑤ 서로 다른 두 무리수의 곱은 항상 무리수이다.

해설

② $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 자연수가 존재하지 않는다.
⑤ $\sqrt{2}$ 와 $-\sqrt{2}$ 의 곱은 유리수이다.
따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다.

19. 두 실수 a, b 가 $a = \sqrt{8} - 3$, $b = -\sqrt{7} + \sqrt{8}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a - b > 0$ ② $b - a < 0$ ③ $b + \sqrt{7} > 3$

④ $ab > 0$ ⑤ $a + 1 > 0$

해설

①
$$\begin{aligned} a - b &= \sqrt{8} - 3 - \left(-\sqrt{7} + \sqrt{8}\right) \\ &= \sqrt{7} - 3 \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{9} < 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ a - b < 0$

②
$$\begin{aligned} b - a &= -\sqrt{7} + \sqrt{8} - \left(\sqrt{8} - 3\right) \\ &= -\sqrt{7} + 3 \\ &= \sqrt{9} - \sqrt{7} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ b - a > 0$

③ (좌변)$= b + \sqrt{7} = -\sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{7} = \sqrt{8}$

(우변)$= 3 = \sqrt{9}$

$\therefore\ b + \sqrt{7} < 3$

④ $a = \sqrt{8} - 3 = \sqrt{8} - \sqrt{9} < 0$

$b = \sqrt{8} - \sqrt{7} > 0$

$\therefore\ ab < 0$

⑤
$$\begin{aligned} a + 1 &= \left(\sqrt{8} - 3\right) + 1 \\ &= \sqrt{8} - 2 \\ &= \sqrt{8} - \sqrt{4} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ a + 1 > 0$

20. $-\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 수에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 자연수가 2 개 있다.

② 정수가 3 개 있다.

③ 무수히 많은 무리수가 있다.

④ 무수히 많은 유리수가 있다.

⑤ 무수히 많은 실수가 있다.

해설

② $-\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{5}$ 사이에는 정수가 -1, 0, 1, 2 모두 4 개이다.