1. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad), k < (\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

2. 두 점 $A(-1,\ 0), B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2 : 1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

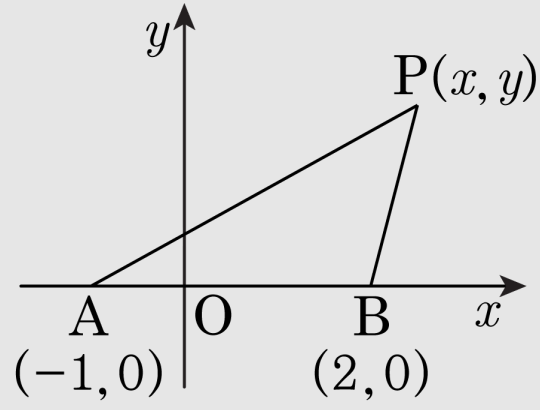
그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



3. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) = 0$

$-4x + 4y + 6 = 0$

$\therefore \ 2x - 2y - 3 = 0$

4. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

5. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+y^2=4$ ② $x^2+y^2=4$

③ $(x-1)^2+y^2=2$ ④ $x^2+(y-4)^2=16$

⑤ $x^2+(y-1)^2=2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0) 이고,
선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점은 $(-1, 0)$,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x-1)^2+y^2=4$

6. 세 점 P(−2, −4), Q(1, 5), R(5, 3) 을 지나는 원의중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

P(−2, −4), Q(1, 5), R(5, 3)

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases}(-2-a)^2+(-4-b)^2=r^2 & \cdots ㉠\\ (1-a)^2+(5-b)^2=r^2 & \cdots ㉡\\ (5-a)^2+(3-b)^2=r^2 & \cdots ㉢\end{cases}$$

㉠, ㉡식 연립 :

$a+3b=1 \cdots ㉣$

㉡, ㉢식 연립 :

$2a-b=2 \cdots ㉤$

㉢, ㉠식 연립 :

$a+b=1 \cdots ㉥$

㉣, ㉥연립하면 $b=0,\ a=1$

㉠식에 $(-2-1)^2+(-4-0)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=25$

$\therefore\ r=5$

$a+b+r=1+0+5=6$

7. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

8. x축 및 y축에 접하고 원 $(x-7)^2+(y-6)^2=4$에는 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 25 ② 27 ③ 30 ④ 32 ⑤ 35

해설

조건을 만족시키는 원은 제 1사분면에
존재하므로, 원의 반지름을 a라 하면
중심의 좌표는 (a,a)가 된다.
주어진 원과 외접하기 위해서는 중심거리가
반지름의 합과 같아야 하므로
$\sqrt{(7-a)^2+(6-a)^2}=a+2$
$\therefore a^2-30a+81=0$
$\therefore$ (두 근의 합)=30

9. 두 원 $x^2+y^2-4x=0, x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-6x-2y+8)+k(x^2+y^2-4x)=0$
위 식이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
$x=1, y=0$ 을 대입하면 $3-3k=0, k=1$
$k=1$ 을 위식에 대입하여
정리하면 $x^2+y^2-5x-y+4=0$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$a=\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ 이다.

10. 실수 $a,\ b$ 와 두 원

$\mathrm{A} : (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

$\mathrm{B} : (x+1)^2+(y-1)^2=3$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, $a,\ b$ 사이의 관계식은?

① $a+b=-3$ ② $a+b=-2$ ③ $a-b=-1$

④ $a^2+b^2=1$ ⑤ $a^2+b^2=2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(-1,\ 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(a+1)x-(b+1)y=0 \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로

$(a+1)\times(-1)+(b+1)\times 1=0$

$\therefore a+b=-2$

11. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4\ (\because\ n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

12. 직선 $y=-3x+12$와 원 $x^2+(y-2)^2=20$의 교점의 좌표를 구하면?

① $(1,2),(3,5)$ ② $(2,6),(4,0)$ ③ $(3,5),(3,4)$

④ $(4,6),(2,3)$ ⑤ $(5,5),(3,3)$

해설

$y=-3x+12$ ……㉠

$x^2+(y-2)^2=20$ ……㉡에서

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-3x+10)^2=20,\ x^2-6x+8=0,$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=2$일 때 $y=6,$

$x=4$일 때 $y=0$이므로

구하는 교점의 좌표는 $(2,6),(4,0)$

13. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

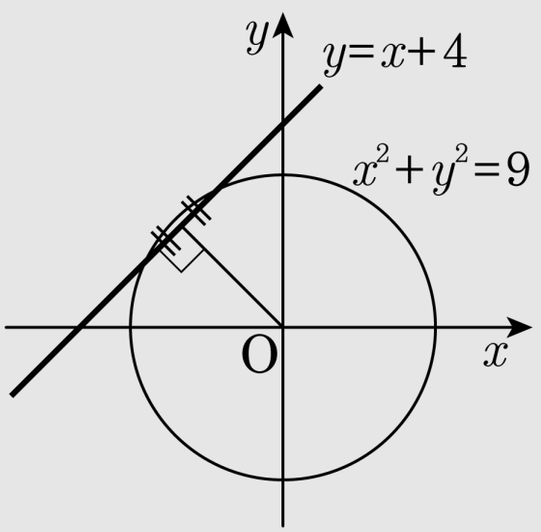
▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

14. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$ 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

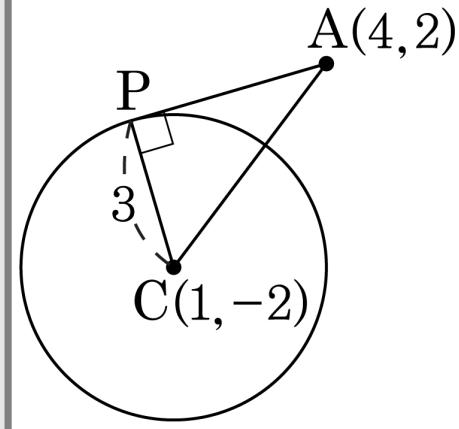
해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$

한편, $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{\mathrm{CP}} = 3$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = 4$



15. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

16. 직선 $3x-4y-12=0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$

② $y=-2x-\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{5}x-1$

③ $y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

④ $y=-\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{2}$

⑤ $y=-4x-3$ 또는 $y=-9x-6$

해설

$3x-4y-12=0$ 에서

$y=\frac{3}{4}x-3\cdots\cdots$ ㉠

이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로

기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+b\cdots\cdots$ ㉡

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $4x+3y-3b=0$ 이고,

원의 중심 $(-3,2)$ 에서 이 직선까지의 거리가

반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, |3b+6|=5, 3b+6=\pm5$

$3b=-1$ 또는 $3b=-11$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 이므로

㉡을 이 식에 대입하여 정리하면

$25x^2+6(17-4b)x+9(b^2-4b+12)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=\{3(17-4b)\}^2-25\cdot9(b^2-4b+12)=0$

$D=0$ 에서 $9b^2+36b+11=0$,

$(3b+1)(3b+11)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$ 또는 $b=-\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면

구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

17. 점 $(0,\ 4)$를 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=\pm\sqrt{11}x+4$ ② $y=\pm\sqrt{13}x+4$

③ $y=\pm\sqrt{14}x+4$ ④ $y=\pm\sqrt{15}x+4$

⑤ $y=\pm\sqrt{17}x+4$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,4)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-4=mx$ 즉, $mx-y+4=0$

원의 중심 $(0,0)$로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=1,4=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2=15$

$\therefore m=\pm\sqrt{15}$

따라서 $y=\pm\sqrt{15}x+4$

18. 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

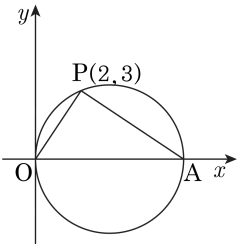
$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1\ ,\ a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm 3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

19. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a-2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle OPA = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$㉠

$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$㉡

㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$㉢

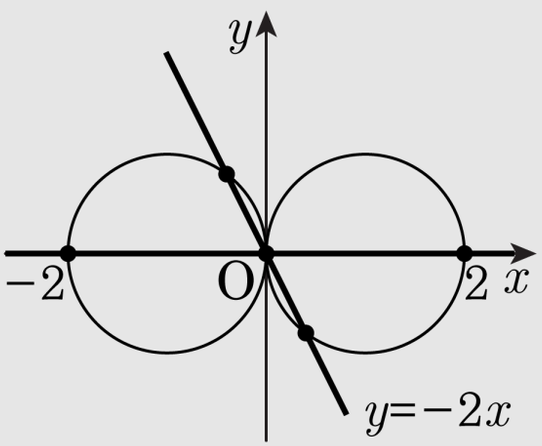
㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.

실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)



21. 직선 $x=2$에 접하고, 원 $(x+3)^2+y^2=1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2=-8x$ ② $y^2=8x$ ③ $y^2=-12x$

④ $x^2=-8y$ ⑤ $x^2=8y$

해설

구하는 원의 중심을 $\mathrm{P}(x,y)$라 놓고 x,y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2+y^2=1$의 중심을 A라고 하면
$\overline{\mathrm{AP}}-1=\overline{\mathrm{BP}}$ 에서
$\sqrt{(x+3)^2+y^2}-1=2-x$
$\therefore\ y^2=-12x$

22. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설

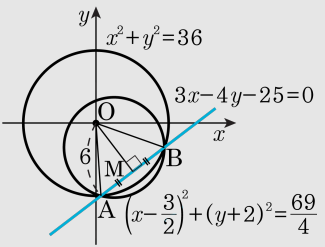
두 원의 공통현의 방정식은

$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$

$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$에서

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{69}{4}$



이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

원 $x^2 + y^2 = 36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$

23. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b),\ (c,\ d)$라 할 때, $a + b + c + d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은

$x_1 x + y_1 y = 5 \cdots ①$

이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3x_1 + y_1 = 5 \cdots ②$

또, (x_1, y_1)은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots ③$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0$,

$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$

$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$

$\therefore x_1 = 1$이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

24. 점 $(1, -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

25. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 $Q(-2, -3)$ 까지의 거리의 최솟값을 구하면?

① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $2(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$

④ $2(\sqrt{6}-1)$ ⑤ $2(\sqrt{7}-1)$

해설

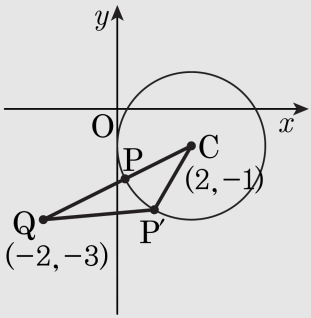
$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서

$\{x + (m-1)\}^2 + (y-m)^2 = -m^2 - 2m + 3$

반지름의 길이를 r 라고 하면

$r^2 = -m^2 - 2m + 3 = -(m+1)^2 + 4$

즉, $m = -1$ 일 때, $r = 2$ 로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이

$\overline{CQ}$와 원 C의 교점을 P라 하면,

원, C 위의 임의의 점 P′에 대하여

$\overline{CP} = \overline{CP'} = 2$이고

$\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} \le \overline{CP'} + \overline{P'Q}$이므로

$\overline{PQ} \le \overline{P'Q}$

따라서, P가 $\overline{CQ}$와 원 C의 교점일 때,

$\overline{PQ}$의 길이가 최소이다.

중심 $(2, -1)$ 과 점 $Q(-2, -3)$ 까지의 거리는

$\sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5}-1)$