

1. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ①

$n(\{0\}) = 1$
- ②

$\{a, b\} \in \{a, b, c\}$
- ③

$\emptyset \in \{1, 2, 3\}$
- ④

$n(\{0\}) < n(\{1\})$
- ⑤

$n(\{1, \{2, 3\}, 4, 5\}) = 4$

해설

- ②

$\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
- ③

$\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$
- ④

$n(\{0\}) = n(\{1\}) = 1$

3. 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 일 때, a, e 를 반드시 원소로 가지는 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 32개

해설

A 의 부분집합 중 원소 a, e 를 포함한 것이므로 $\{b, c, d, f, g\}$ 의 부분집합에 a, e 를 첨가한 것과 같다.

따라서 $\{b, c, d, f, g\}$ 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개)이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_A 라 하고, 집합 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_B 라 하자. $n(P_A - P_B)$ 의 값은?

① 31

② 32

③ 47

④ 48

⑤ 56

해설

$$n(P_A - P_B) = n(P_A) - n(P_A \cap P_B) = n(P_A) - n(P_{(A \cap B)}) = n(P_A) - \{3, 4, 5, 6\} \text{의 부분집합의 개수} = 2^6 - 2^4 = 48$$

5. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cup Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$ 이다. 따라서, $q \Rightarrow p$

6. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q 라 하자. $P = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 7

해설

$p \rightarrow \sim q$ 의 반례는 $P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.
즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$
 $\therefore P \cap Q = \{6\}$

7. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

8. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \emptyset$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 - ④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
 - ⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

9. 조건 p , q , r , s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, r 은 s 이기 위한 필요조건, s 는 q 이기 위한 필요조건일 때, q 는 s 이기 위한 (가) 조건이고, s 는 p 이기 위한 (나) 조건이다. 이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?
- ① 필요, 필요충분 ② 필요충분, 충분
③ 필요, 충분 ④ 필요충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots\textcircled{\tiny{7}}$
 같은 방법으로 $r \Rightarrow q \dots\dots\textcircled{\tiny{8}}$
 $s \Rightarrow r \dots\dots\textcircled{\tiny{9}}$
 $q \Rightarrow s \dots\dots\textcircled{\tiny{10}}$
 $\textcircled{\tiny{9}}$ 에서 $q \Rightarrow s$ 이고 $\textcircled{\tiny{10}}$, $\textcircled{\tiny{9}}$ 에서 $s \Rightarrow q$ 이므로 q 는
 필요충분조건 (가)
 또, $p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로 s 는 p 이기 위한 필요조건

10. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

11. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x + 12)$ 를 만족시키고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

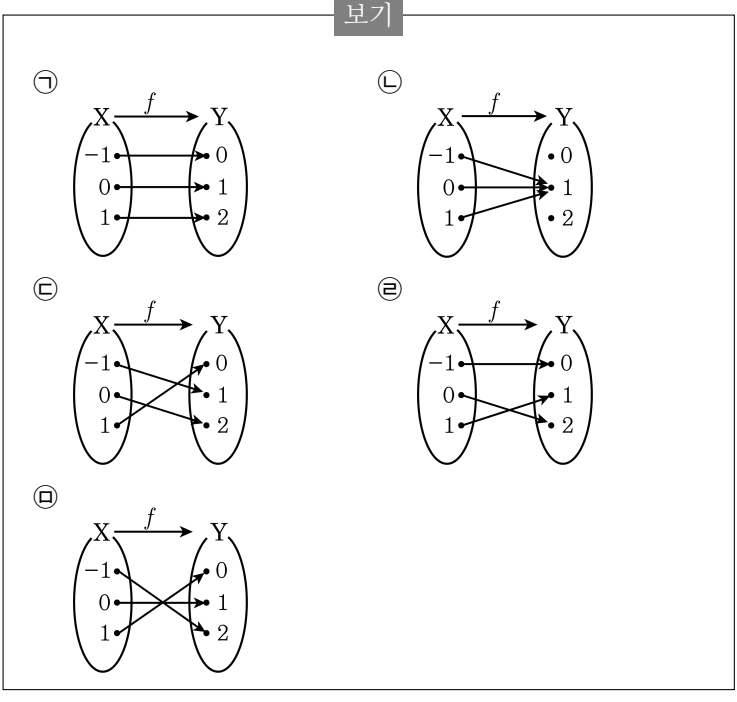
$$f(13) = f(1 + 12) = f(1)$$

$$f(25) = f(13 + 12) = f(13) = f(1)$$

$$f(37) = f(25 + 12) = f(25) = f(1)$$

$$\text{따라서 준식은 } f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$$

12. 다음 보기의 함수가 어떤 함수인지 말한 것 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?



- ① ㉠ 항등함수

③ ㉢ 일대일 대응

⑤ ㉤ 일대일 대응

② ㉡ 상수함수

④ ㉣ 상수함수

해설

일대일 대응 : ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
상수함수 : ㉡

13. 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 임의의 자연수 x 에 대하여 $f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일 함수이면 역함수가 항상 존재한다.
- ㉢ 함수의 모든 그래프는 집합으로 표현가능하다.
- ㉤ 함수 f, g 에 대하여 $f = g^{-1}$ 이면, f, g 는 $y = -x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 임의 실수 x 에 대하여 $f(x) = [x]$ 는 일대일 함수이다.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

- ① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉢, ㉤
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 함수는 변수 x 에 해당되는 y 값이 하나씩 대응되어야 한다.
 $\Rightarrow f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다 (참)
- ㉡ 반례 : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이면 일대일 함수라도 역함수가 존재하지 않는 경우가 있다.
- ㉢ 함수는 집합으로 표현 가능하다.
- ㉤ $f = g^{-1}$ 이면 f, g 는 $y = x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 일대일 함수는 $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
 $\therefore f(x) = [x]$ 는 일대일 함수가 아니다.

14. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a = -\frac{3}{2}$

② $a = -\frac{5}{2}$

③ $a = -\frac{7}{2}$

④ $a = -\frac{9}{2}$

⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

15. 실수 a, b 가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0$

④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a| (i)^2 = -|a| = a$ 이므로 옳지 않다.

16. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{1}{b}+a$ 의 값을 구하면?

① $2+\sqrt{3}$

② $3+\sqrt{3}$

③ $4+\sqrt{3}$

④ $5+\sqrt{3}$

⑤ $5-\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{19-2\sqrt{48}}=4-\sqrt{3}\text{에서}$$

$$4-\sqrt{3}=2+(2-\sqrt{3})\text{이므로}$$

$$a=2, b=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{b}+a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+2$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+2$$

$$=4+\sqrt{3}$$

17. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때
 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a+2 > 0$, $a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \end{aligned}$$

$\therefore a=0$ 일 때 최댓값 2

18. $(1 + \sqrt{2})x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, $(1 - \sqrt{2})y = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

$$(1 + \sqrt{2})x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$(1 - \sqrt{2})y = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2} + 1}{-\sqrt{2} + 1} = -3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = -4\sqrt{2}, xy = -1$$

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (x + y)^2 - xy \\ &= (-4\sqrt{2})^2 - (-1) = 33 \end{aligned}$$

19. $y = -\sqrt{4-2x} + 1$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

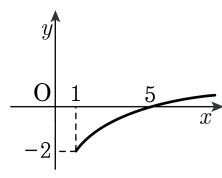
- ① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ⑤ 이 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서 만난다.

해설

- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④, ⑤ 꼭지점이 $(2, 1)$ 이고 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4$, 분면을 지난다.

20. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② -1 ③ 2
 ④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프를 보면

점(1, -2)에서부터 시작하므로

$$-\frac{b}{a} = 1, c = -2$$

$$\therefore -b = a, c = -2$$

$y = \sqrt{ax-a} - 2$ 가 점(5, 0)을 지나므로

$$0 = \sqrt{5a-a} - 2, 2 = \sqrt{4a}$$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 1 - 1 - 2 = -2$$

21. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합을 구하면?

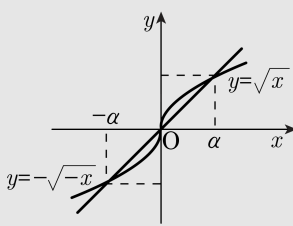
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는

원점에 대하여 대칭이므로

다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.



22. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 의 관계가 되는 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A = B$	㉡ $A = C$	㉢ $B = C$
㉣ $B \subset A$	㉤ $C \subset A$	㉥ $C \subset B$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉡, ㉤, ㉥ ⑤ ㉣, ㉥

해설

- ㉡ $A = C$ 면 $A \subset C, C \subset A$ 이므로, $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.
㉤ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $C \subset A$ 일 때 $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.

23. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$ 에 대하여 $A \cap (B \cup C)$ 를 원소 나열법으로 옳게 나타낸 것은?
- ① $\{2, 4\}$ ② $\{4, 10\}$ ③ $\{2, 3, 4\}$
④ $\{2, 4, 10\}$ ⑤ $\{2, 4, 6, 10\}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 9, 10\} \\ A \cap (B \cup C) &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10\} \\ &= \{2, 4, 10\} \end{aligned}$$

24. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A \cup B = B \cup A$

② $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \emptyset$

④ $B \cap \emptyset = \emptyset$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

25. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

② $A \subset B$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이다.

③ $B - A = A^c \cap B$

④ $A \cap \emptyset^c = A$

⑤ $U - \emptyset = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$ 이다.

④ $A \cap \emptyset^c = A \cap U = A$

⑤ $U - \emptyset = U = A \cup A^c$

26. 두 집합 $A = \{3, a+1, 9\}$, $B = \{a-1, a, a+3\}$ 에 대하여 $A-B = \{5, 9\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A-B = \{5, 9\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

$$a+1=5$$

$$\therefore a=4$$

27. 전체 집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

- ㉠ $A \cap B = \{7\}$
- ㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$
- ㉢ $A^c \cap B = \{13\}$
- ㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
- ㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,
 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$
㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$
㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$
㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$

28. $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2007}$ ② $\frac{1}{2008}$ ③ $\frac{1}{2009}$ ④ $\frac{1}{4017}$ ⑤ $\frac{1}{4018}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 에서}$$

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

29. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^2 + 2x, h(x) = \frac{3x+1}{f(x)}$ 에 대하여, $(h \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) = a \text{라 하면 } f(a) &= 3 \\ f(a) = a^2 + 2a &= 3 \\ a^2 + 2a - 3 &= 0, (a+3)(a-1) = 0 \\ a > 0 \text{ 이므로 } a &= 1 \\ \therefore f^{-1}(3) = 1, f(1) &= 3 \\ \therefore (h \circ f^{-1})(3) &= h(f^{-1}(3)) = h(1) \\ h(1) = \frac{3+1}{f(1)} &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

30. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\&= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\&= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \\x &= 2 - \sqrt{3} \text{ 에서 } (x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2 \\x^2 - 4x + 4 &= 3 \\\therefore x^2 - 4x + 1 &= 0 \\x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1 &= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1 \\&= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1\end{aligned}$$