1. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6, -5)$　② $(5, -6)$　③ $(4, -3)$
④ $(5, -4)$　⑤ $(-3, 6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$
$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$
k에 관계없이 일정한 점을 지나려면
$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$
연립하면 $x=6, \ y=-5$
$\therefore$ 일정한 점은 $(6, -5)$

2. 직선 $(3k+1)x+(k-1)y+(2k+6)=0$는 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표는?

① $(2, 4)$ ② $(4, 2)$ ③ $(2, -4)$
④ $(4, -2)$ ⑤ $(-2, 4)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(3x+y+2)k+x-y+6=0$
k에 관계없이 성립하려면
$3x+y+2=0$, $x-y+6=0$
위의 두 식을 연립하면 $x=-2$ $y=4$
∴ 항상 $(-2, 4)$를 지난다.

3. $abc < 0$, $\frac{a-b}{c} > 0$인 세 실수 a, b, c에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $c > 0$이면 $a > b$이다. ② $a > 0$이면 $c < 0$이다.
③ $a > b$이면 $b < 0$이다. ④ $a > b$이면 $a > 0$이다.
⑤ $a < b$이면 $ab > 0$이다.

해설
① $c > 0$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $a-b > 0$ 즉, $a > b$
② $a > 0$이면, $b < 0$, $c > 0$일 때도 두 부등식이 성립하므로 $c < 0$라고 말할 수 없다.
③, ④ $a > b$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $c > 0$이므로 $ab < 0$이다.
따라서, $a > b$, $ab < 0$에서 $a > 0$, $b < 0$이다.
⑤ $a < b$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $c < 0$이다.
따라서, $ab > 0$

4. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a > b,\ c < 0$일 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면 몇 개인가?

(1) $ac < bc$	(2) $a^2 > b^2$	(3) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
(4) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(5) $a^3 > b^3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

(1) $a > b,\ ac < bc \Rightarrow (\bigcirc)$

(2) (반례) $a = 1,\ b = -2$

$1 > -2,\ (1)^2 < (-2)^2 \Rightarrow (\times)$

(3) $a > b,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Rightarrow (\bigcirc)$

(4) (반례) $1 > -2,\ 1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow (\times)$

(5) $a^3 > b^3 \Rightarrow (\bigcirc)$

∴참 : (1), (3), (5)

5. $\frac{5}{3}x-1 < x+\frac{1}{3}$, $0.3(x-2) \geq 0.2x-0.1$을 모두 만족하는 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

$\frac{5}{3}x - 1 < x + \frac{1}{3}$, $5x - 3 < 3x + 1 \quad \therefore \ x < 2$

$0.3(x-2) \geq 0.2x - 0.1$,

$3(x-2) \geq 2x - 1 \quad \therefore \ x \geq 5$

$\therefore$ 만족하는 x는 없다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5<3x+2 \\ \dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(i) $2x+5<3x+2$, $x>3$

(ii) $\dfrac{x-5}{4}<-\dfrac{x+1}{2}$, $x<1$

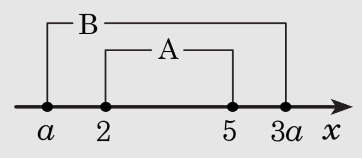
따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

7. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$
$x^2-7x+10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

8. 구간 $[2, 3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 5

해설

$[2, 3] \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$

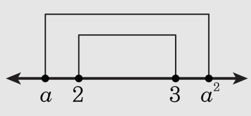
$x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$

$(x-a)(x-a^2) \le 0$

$a < x < a^2 (\because\ a > 1)\quad a \le 2, a^2 \ge 3$

$\therefore\ a$의 최댓값 : 2

a의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore\ 2\sqrt{3}$



9. 두 부등식 $|x-1|<2$, $x^2-2ax+a^2-4 \ge 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $-1<x\le 2$가 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① 0　② -2　③ 4　④ -6　⑤ 8

해설

$|x-1|<2$의 해는 $-1<x<3$이므로
공통범위가 $-1<x\le 2$가 되려면 $x=2$가
$x^2-2ax+a^2-4=0$의 근이어야 한다.
$\therefore 4-4a+a^2-4=0$
$\therefore a=0,\ 4$
그런데 $a=0$이면,
공통범위는 $2\le x<3$이 되어 모순이다.
$\therefore a=4$

10. 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5 개　② 6 개　③ 7 개　④ 8 개　⑤ 9 개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$에서
$(x-5)(x+1) < 0$이므로
$-1 < x < 5$
$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$에서
$x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)$
$= (x-a)(x-a-2) < 0$이므로
$a < x < a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a + 2 > -1$
즉 $a > -3$또는 $a < 5$에서
$-3 < a < 5$
따라서 정수 a의 개수는 7개다.

11. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α, β 가 $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a<0$)

㉠ $c<0$	㉡ $ab<0$
㉢ $a-b+c<0$	㉣ $a+2b+4c>0$

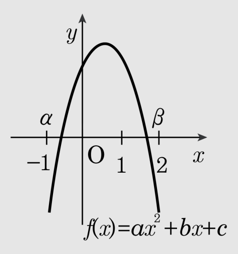
① ㉠　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 로 놓으면

$-1<\alpha<0, 1<\beta<2$ 에서



㉠) $f(0)=c>0$

㉡) 꼭짓점의 x좌표가 양이므로 $-\frac{b}{2a}>0$ $\therefore ab<0$

㉢) $f(-1)=a-b+c<0$

㉣) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c>0,\ \frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore a+2b+4c>0$

12. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$　② $a>-1$　③ $a>1$
④ $a<1$　⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$

13. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면

다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로

$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\overline{\alpha} + 1}{\overline{\alpha} + 2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

14. $x^3 = 1$의 세 근이 a, b, c이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　　② 65　　③ 68　　④ 72　　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \cdots$ ①

$\therefore \; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$이 값이 실수이므로

①에서 $b = 1$이다.

$\therefore \; 21b + 44 = 65$

15. 네 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(-3,0), \mathrm{B}(4,0), \mathrm{C}(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$　　② $\frac{4}{7}$　　③ $\frac{3}{4}$　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle\mathrm{AOC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOC}$ 의 높이가 같으므로
$\triangle\mathrm{AOC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOC}$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{BO}} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle\mathrm{AOC}$ 의 넓이는 $\triangle\mathrm{BOC}$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

16. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(3,4)$와 선분 AB의 연장선 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배일 때, a의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

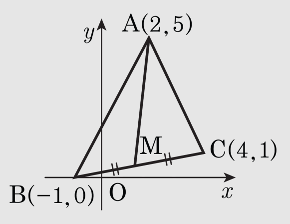
선분 AP의 길이가 선분 AB의 길이의 2배이므로
점 P는 $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(3,4)$를 $2:1$로 외분하는 점이다.
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{6-1}{2-1}, \frac{8-2}{2-1}\right)=\mathrm{P}(5, 6)$
$\therefore a = 5$

17. 세 점 $A(2,\ 5)$, $B(-1,\ 0)$, $C(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$의 값은?

① 25　　② 27　　③ 29　　④ 31　　⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$이다.
따라서 파포스의 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$



$\therefore \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$
$= \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]$
$= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27$

18. $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이 M인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{AM}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

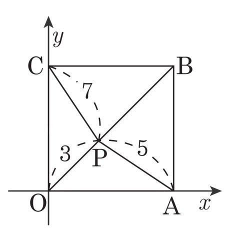
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$이므로

$5^2+3^2=2(\overline{\mathrm{BM}}^2+2^2)$

$\therefore \overline{\mathrm{BM}}^2=13$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{13}$

19. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} = 3$, $\overline{\mathrm{AP}} = 5$, $\overline{\mathrm{CP}} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$　② $\sqrt{65}$　③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{65}$

20. 세 점 A(2, 2), B(4, 6), C(0, 1)과 좌표평면 위의 임의의 점 P 에 대해 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값과 최솟값일 때의 점 P 의 좌표를 구하면?

① 61, (0, 0)　② 12, (2, 3)　③ 12, (3, 3)
④ 22, (2, 3)　⑤ 25, (3, 3)

해설

P $= (x, y)$라 하면
$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$
$= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-4)^2 + (y-6)^2 + x^2$
$+ (y-1)^2 = 3(x-2)^2 + 3(y-3)^2 + 22$
∴ 최솟값은 P가 (2, 3)일 때 22이다.

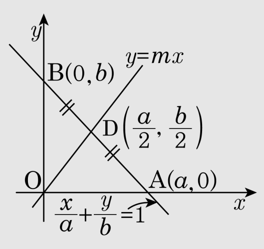
21. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, m의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① $\frac{b}{a}$ ② $\frac{a}{b}$ ③ $\frac{b}{2a}$ ④ $\frac{a}{2b}$ ⑤ $\frac{2a}{b}$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 $\mathrm{D}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$라 하면
$\triangle\mathrm{OAD}=\triangle\mathrm{OBD}$이므로 직선 $y=mx$가 점 D를 지나야 한다.

$\therefore m=\dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{b}{a}$



22. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ 7)$, $C(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle ABC$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2,1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5,5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$