1. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

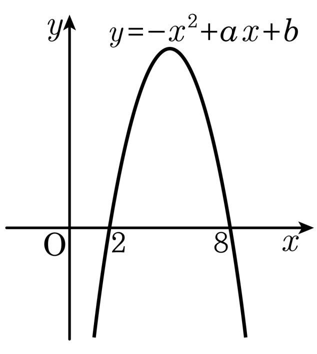
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

2. 다음 그림과 같은 이차함수의 그래프에서 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=-x^2+ax+b$ 가 $(2,\ 0)$, $(8,\ 0)$ 을 지나므로 이차함수의 식을 구할수 있다.

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)(x-8) \\ &= -x^2+10x-16 \\ &= -(x^2-10x+25)+25-16 \\ &= -(x-5)^2+9 \end{aligned}$$

$\therefore x=5$ 일 때 최댓값은 9 이다.

3. 함수 $y=-x^2-2x+5$ $(-2 \le x \le 2)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

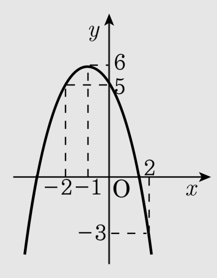
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$
따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며
최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.
$\therefore\ M+m=6-3=3$

4. 이차함수 $y=x^2+ax+2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$ 일 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha<\beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=2a \quad \cdots ㉠$
이 때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$ 이므로
$\beta-\alpha=2$ 양변을 제곱하면
$(\beta-\alpha)^2=4$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4 \quad \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2-8a-4=0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

5. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

6. 두 곡선 $y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - 5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면
$y' = 2x$이므로 $y'_{x=t} = 2t$는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$이므로
$(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$에서
$(t + 1)(t - 2) = 0 \quad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

7. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 6$ 의 그래프를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 -3 만큼 평행이동한 포물선의 최솟값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： -1

해설

$y = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$
$y + 3 = (x + 2 - 2)^2 + 2$
$y = x^2 - 1$
따라서 $x = 0$ 일 때 최솟값은 -1을 갖는다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 4x - 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$y = x^2 - 4x - 7$

$= (x-2)^2 - 11$

$x = 2$ 일 때, 최솟값 -11 을 갖는다.

9. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$y=a(x+3)^2+4$
$=a(x^2+6x+9)+4$
$=ax^2+6ax+9a+4$

$9a+4=2,\ 9a=-2$ 이므로 $a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$\therefore abc=\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{27}$

10. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \le x \le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.
$-1 \le x \le 2$ 에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값
-1 을 갖는다.

11. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x+a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a+2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

12. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k+a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

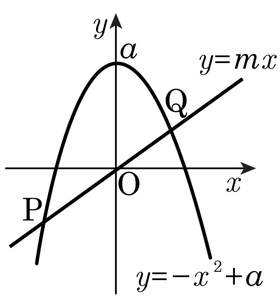
$\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a+4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$2a + 4 = 0$

$\therefore a = -2$

13. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

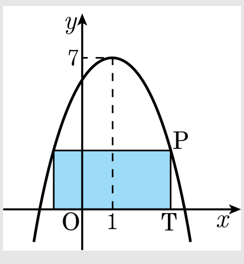
14. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

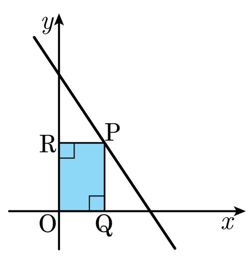


포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14\end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

15. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.