1. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$　　② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$　　③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$　　⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

2. 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 1$

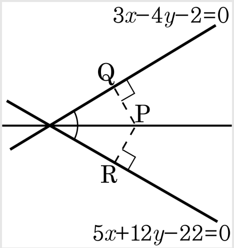
3. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

4. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0$ $\cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 1 : 3 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$$Q(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

5. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

6. 두 직선 $2x+3y+1=0$, $x-2y+5=0$의 교점을 지나고 직선 $x+4y-4=0$에 수직인 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2-b^2의 값은?

① -106 ② -105 ③ -104 ④ -103 ⑤ -102

해설

구하는 직선은 $(2x+3y+1)+k(x-2y+5)=0$

$\therefore (2+k)x+(3-2k)y+5k+1=0 \cdots$ ㉠

㉠과 직선 $x+4y-4=0$이 수직이므로

$(2+k)\cdot 1+(3-2k)\cdot 4=0$

$14-7k=0$

$\therefore k=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $4x-y+11=0$

$\therefore y=4x+11$

$\therefore\ a^2-b^2=4^2-11^2=16-121=-105$

7. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(1,3), \mathrm{C}(2,0)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+3=0$ ③ $x-3y-2=0$

④ $x-4y+5=0$ ⑤ $x-5y+4=0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CP}}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

8. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 $G(2,\ -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$
또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$
$\therefore\ a+b = -1$

9. 지수는 이번 기말고사에 국어, 영어, 과학, 수학 4 과목을 시험을 치루었다. 지금까지의 국어, 영어, 과학 성적이 각각 88 점, 79 점, 97 점일 때, 수학성적까지의 평균이 88 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 수학시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는가? (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : ________ 점

▷ 정답 : 88 점

해설

$$88 \leq \frac{88+79+97+x}{4} \leq 91$$

$$88 \times 4 \leq 88+79+97+x \leq 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 352 \leq 264+x \\ 264+x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \leq 264-352 \\ 264+x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 88 \\ x \leq 100 \end{cases}$$

$$\therefore\ 88 \leq x \leq 100$$

10. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a > b,\ \ b > c,\ \ c > d$이면 $a > d$
㉡ $a > b > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$
㉢ $a > b > 0,\ \ c > d > 0$이면 $ac > bd$
㉣ $ac > bc$이면 $a > b$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $a > b,\ \ b > c$이면 $a > c$

$a > c,\ \ c > d$이면 $a > d$ (참)

㉡ $a > b > 0$이므로 $a - b > 0$, $ab > 0$이다.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0 \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$(참)

㉢ $c > d$이고 $a > 0$이므로 $ac > ad$

$a > b$이고 $d > 0$이므로 $ad > bd$

따라서 $ac > bd$(참)

㉣ $c < 0$일 때 $ac > bc$이면 $a < b$이다. (거짓)

11. 다음은 연립부등식 $-6 \le 3x-4 < 9$ 를 세 친구가 각각 풀이한 것이다. 다음 중 풀이 과정이 <u>틀린</u> 친구는 누구인지 찾아라.

<우주>
$-6 \le 3x-4 < 9$ 를 나누어 풀면
(i) $-6 \le 3x-4$
$-3x \le -4+6$
$-3x \le 2$
$x \ge -\dfrac{2}{3}$
(ii) $3x-4 < 9$
$3x < 9+4$
$3x < 13$
$x < \dfrac{13}{3}$
$\cdots$

<명수>
$-6 \le 3x-4 < 9$ 를 각 변에 4 를 더하면 $-2 \le 3x < 13$ 이다.
그리고 각 변에 3 을 나누면 $-\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{13}{3}$ 이다. $\cdots$

<유나>
$-6 \le 3x-4 < 9$ 를 각 변에 3 을 나누면 $-2 \le x-4 < 3$ 이다.
그리고 각 변에 4을 더하면 $2 \le x < 7$ 이다. $\cdots$

▶ 답:

▷ 정답: 유나

해설

<우주>와 <명수> 의 풀이방법은 옳다.
<유나> 의 풀이방법 중
$-6 \le 3x-4 < 9$ 를
<u>각 변에서 3을 나누면</u> (⇒ 각 변에 4 를 더한 후 3 으로 나누어주어야 한다.)
$-2 \le x-4 < 3$ 이다.
그리고 각 변에 4을 더하면 $2 \le x < 7$ 이다.
이 부등식의 해를 구해보면
$-6 \le 3x-4 < 9$
$-6+4 \le 3x < 9+4$
$-2 \le 3x < 13$
$-\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{13}{3}$
이 된다.

12. x가 1, 3, 5, 7, 9이고, 세 부등식 A가 $x > 2$, B가 $x - 5 < 3$, C가 $-x + 1 \geq -2$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 부등식 B와 C의 공통해는 부등식 A의 해이다.

② 부등식 C의 해는 부등식 A의 해와 부등식 B의 해이다.

③ 부등식 B에서 C를 제외한 수는 부등식 A의 해이다.

④ A, B, C의 공통해는 존재한다.

⑤ B와 C의 공통해는 A의 해와 같다.

해설

A는 3, 5, 7, 9 B는 $x - 5 < 3$, $x < 8$이므로 1, 3, 5, 7 C는 $-x + 1 \geq -2, x \leq 3$ 이므로 1, 3

① B와 C의 공통해는 $1, 3$이므로 B와 C의 공통해는 A의 해가 아니다.

⑤ B와 C의 공통해는 C의 해이다.

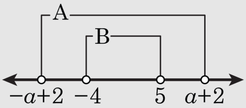
13. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$　　② $0 < a < 3$　　③ $0 \le a \le 3$

④ $a \ge 3$　　⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



14. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프가 항상 직선 $y = kx + 2$ 의 위쪽에 있을 때, 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

이차함수의 그래프가 항상
직선의 위쪽에 있으므로
$x^2 + 2x + 3 > kx + 2$, $x^2 + (2-k)x + 1 > 0$
모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로
$D = (2-k)^2 - 4 < 0,\ k(k-4) < 0$
$\therefore\ 0 < k < 4$
따라서 정수 k 는 1, 2, 3 의 3 개이다.

15. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$　　② $k \ge 1$　　③ $k < -1$

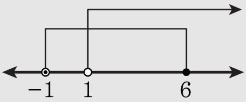
④ $k > -1$　　⑤ $k \ge -1$

해설

$x^2 - 5x - 6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$



연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$의 해는 $x > 1$, $x < -k$이어야 하고

다음 그림에서 k의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

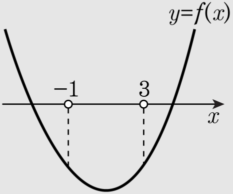
16. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



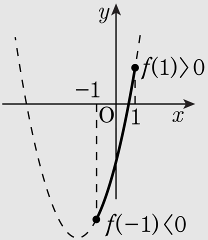
(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
$\therefore k \leq -3$
(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k + 3 \leq 0$
$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \leq -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.

17. 이차방정식 $x^2+4mx-3m=0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m>\frac{2}{9}$ ② $m>\frac{1}{7}$ ③ $m>-\frac{1}{3}$
④ $m<-\frac{1}{3}$ ⑤ $m<\frac{2}{9}$

해설

$f(x)=x^2+4mx-3m$으로 놓을 때,
$f(x)=0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1)=1-4m-3m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{7}$

$f(1)=1+4m-3m>0 \Rightarrow m>-1$

$\therefore\ m>\frac{1}{7}$

18. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=-1+2=1$

19. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점 문항 개수를 x, 3점 문항을 y,
4점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

20. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① $\times 3-$ ② $\times 2$하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ y\pm 1,\ x\pm 1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

21. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㄷ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㄹ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$

(ⅰ) ㄷ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ⅱ) ㄹ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

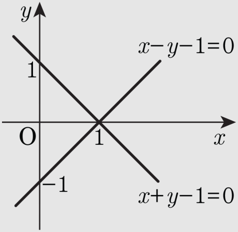
22. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

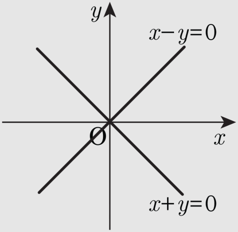
① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개

④ 2 개 ⑤ 4 개

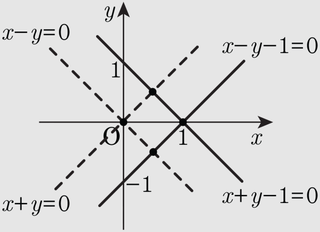
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

23. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=-1$

24. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$

25. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$ ④ 2ω ⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$

26. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

27. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x-1$로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$의 값은?

① -2　　② -3　　③ -4　　④ 2　　⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+mx^2+nx+1 &= (x-1)\,Q(x) \\ &= (x+2)\,Q'(x)+3 \end{aligned}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+m+n+1=0$

$\therefore m+n=-2 \cdots$ ㉠

양변에 $x=-2$을 대입하면

$-8+4m-2n+1=3$

$\therefore 2m-n=5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$\therefore m-n=4$

28. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$와 $\triangle\mathrm{OAP}$의 높이가 같으므로

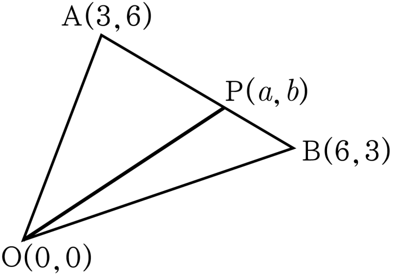
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$이려면

P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.

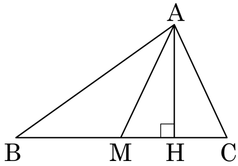
따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{12+3}{3}, \dfrac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



29. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots ㉠\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC 에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

30. 세 점 $A(6,1)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $O(1,-2)$ ② $O(2,\ 2)$ ③ $O(2,-2)$

④ $O(2,-1)$ ⑤ $O(1,-1)$

해설

외심의 좌표를 $O(a,b)$라 하면

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 즉,$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$

$\therefore\ 7a - b = 16 \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{OA} = \overline{OC}$, 즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로

$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$

$\therefore\ 2a - b = 6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $a = 2,\ b = -2$

$\therefore O(2,-2)$

31. 부등식 $|x-k| \le 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \le 3$에서 $-3 \le x-k \le 3$,

$-3+k \le x \le 3+k$

따라서 x의 최댓값은 $3+k$,

최솟값은 $-3+k$이므로

$(-3+k)(3+k) = 9$

$k^2 - 9 = 9$

$k^2 = 18 \quad \therefore k = \pm 3\sqrt{2}$

k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

32. $|x+3| \le |x-2|$을 풀면?

① $x \le -3$　② $-3 \le x \le -\frac{1}{2}$　③ $-3 < x \le -\frac{1}{2}$

④ $2 \le x$　⑤ $x \le -\frac{1}{2}$

해설

$|x+3| - |x-2| \le 0$

i) $x < -3$일 때

$-x-3+x-2 = -5 \le 0 \quad \therefore \ x < -3$

ii) $-3 \le x < 2$일 때

$x+3+x-2 = 2x+1 \le 0\,,\ x \le -\frac{1}{2} \quad \therefore \ -3 \le x \le -\frac{1}{2}$

iii) $x \ge 2$일 때

$x+3-x+2 = 5 \le 0$ (해가없다)

$\therefore$ i) , ii) , iii) 에서 $x \le -\frac{1}{2}$

33. 직선 $3x-4y=0$ 과 평행이고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

① $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0,\ 3)$

해설

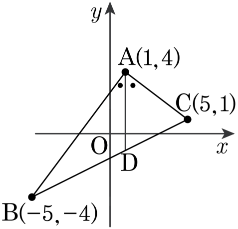
직선 $3x-4y=0$ 과 평행한 직선을
$3x-4y+k=0$ 이라 놓으면,

$$\frac{|3\times2-4\times1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore\ |2+k|=5,\ k=3$ ($\because$ y 절편>0)

$\therefore$ 직선 $3x-4y+3=0$ 의 y 절편은$\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$

34. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$　　② $\sqrt{2}:1$　　③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$　　⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$이고

각의 이등분선정리에 의해

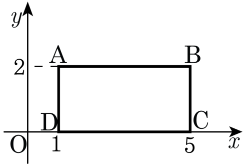
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \triangle ABC\ :\ \triangle ACD=2\ :\ 1$

35. 점 $(-1, -1)$을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+1=0$일 때, $a-b$의 값은?



① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$을 지나므로, $-a-b+1=0$ $\cdots$ ㉠

그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심 $\left(\dfrac{5+1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right)$를 지나야 한다.

$\Rightarrow$ $3a+b+1=0$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면, $a=-1$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-3$