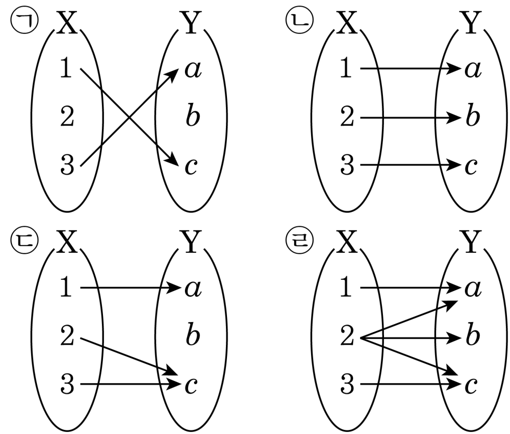
1. 다음 대응 관계 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

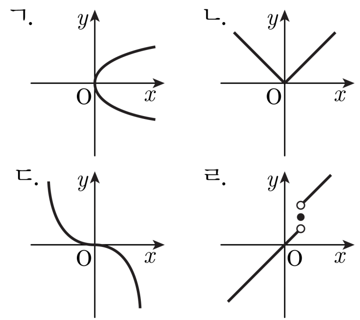
해설

㉠ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

㉡, ㉢ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.

㉣ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

2. 다음 방정식의 자취들 중 함수인 것은 x 개, 일대일 대응인 것은 y 개이다. $x+y$ 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수는 주어진 x 에 y 값이 하나씩 대응해야 한다.
따라서 ㉡, ㉢, ㉣ 이 함수이다.
일대일 대응은 함수 중에 치역과 공역이 일치하는 것을 말한다.
따라서 ㉢이 일대일 대응이다.
$\therefore \quad x+y=4$

3. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 중 X에서 X로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$f(x) = x, \quad g(x) = |x|$$
$$h(x) = x^3, \quad k(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$$

① f ② $f,\ h$ ③ $f,\ g,\ h$

④ $f,\ h,\ k$ ⑤ $g,\ h,\ k$

해설

f : $f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$이므로 항등함수이다.

g : $g(-1) = 1$이므로 항등함수가 아니다.

h : $h(-1) = -1,\ h(0) = 0,\ h(1) = 1$이므로 항등함수이다.

k : $k(-1) = -1,\ k(0) = 0,\ k(1) = 1$이므로 항등함수이다.

따라서 항등함수인 것은 $f,\ h,\ k$이다.

4. 함수 $y=-x-1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a, y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-x-1$ 에서 $x=-y-1$
여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y=-x-1$
따라서 x 절편 $a=-1$, y 절편 $b=-1$ 이므로
$ab=1$

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

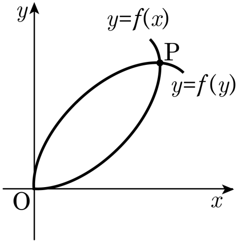
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$\therefore\ a = \frac{5}{2}$

6. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

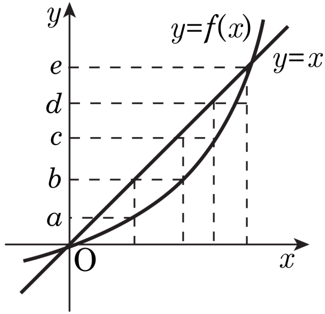
③ $(1,\ 2)$ ④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

7. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $(f\cdot f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\cdot f)^{-1}(b)=(f^{-1}\cdot f^{-1})(b)$

$=f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b)=k$라고 하면, $f(k)=b$

$\therefore\ k=c$

$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$

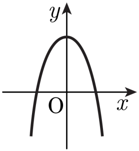
또, $f^{-1}(c)=t$라고 하면, $f(t)=c$

$\therefore\ t=d$

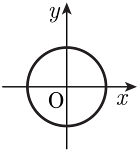
$\therefore\ (f\cdot f)^{-1}(b)=d$

8. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

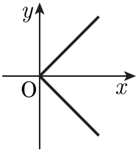
①



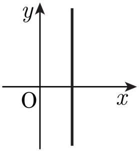
②



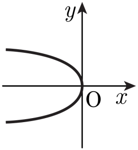
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

9. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

10. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$에 대하여 $(f \circ g)(x)$를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x+2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x-2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$에 대하여

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

11. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=-x^2+x$ 에 대하여 $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$ 의 함숫값을 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -47 ② -35 ③ 12 ④ 37 ⑤ 47

해설

$$a=(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(-2)=-5$$

$$b=(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(7)=-42$$

$$\therefore\ a-b=-5-(-42)=37$$

12. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

13. 두 함수 f, g가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x-1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g와 f의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ -15 ④ -24 ⑤ -29

해설

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$

$\therefore\ (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$

14. 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $(g\circ f)(1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=5$

15. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$
② $a = 1$
③ $b = c$
④ $a = 0$ 또는 $b = c$
⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c)\\ &= a(ax + c) + b\\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

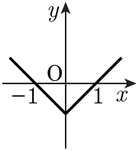
$\therefore\ ac + b = ab + c$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

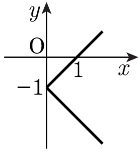
$\therefore\ a = 1$ 또는 $b = c$

16. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

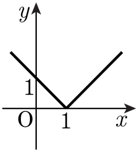
①



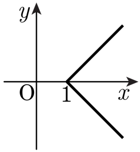
②



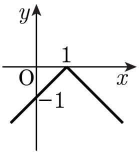
③



④



⑤



해설

$|y| = x - 1$ 에서

$y \geq 0$ 일 때,

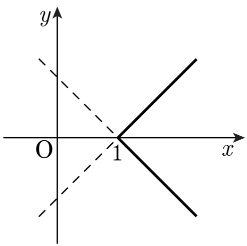
$y = x - 1$

$y < 0$ 일 때,

$-y = x - 1,\ y = -x + 1$

따라서, 그래프는 다음

그림과 같다.



17. 함수 $f(x)=|4x+a|+b$ 는 $x=3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

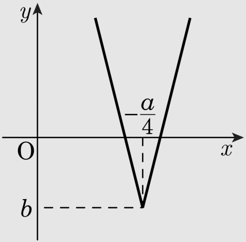
▷ 정답 : 10

해설

$f(x)=|4x+a|+b=\left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$ 의 그래프는

$y=|4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x=-\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4}=3,\ b=-2$

따라서 $a=-12,\ b=-2$ 이므로

$\therefore b-a=10$

18. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

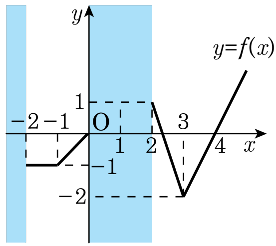
19. 주기가 5인 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 중 $f(2006)$ 과 같은 것을 고르면?

① $f(1)$ ② $f(2)$ ③ $f(3)$ ④ $f(4)$ ⑤ $f(5)$

해설

$$f(2006) = f(5 \times 401 + 1) = f(1)$$

20. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



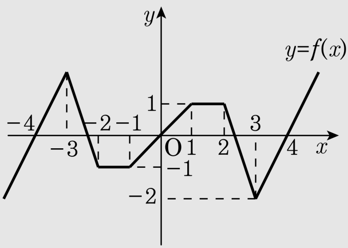
> $-4 \leq x \leq -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \leq x \leq 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로

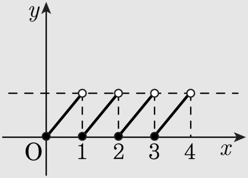


$-4 \leq x \leq -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \leq x \leq 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

21. $y = x - [x](0 \le x \le 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \le x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \le x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \le x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \le x \le 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

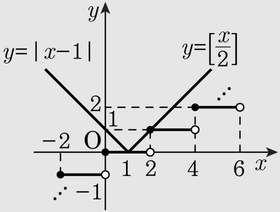
$4\sqrt{2}$ 가 된다.

22. 두 함수 $y = |x-1|$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = |x-1|$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

23. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

ㄱ $f(3)=4$

ㄴ $0 \le f(n) \le 4$

ㄷ $f(n)=2$인 자연수 n은 없다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한 일의 자리수이므로 $3^2=5\times1+4=14_{(5)}$에서 $f(3)=4$ $\therefore$ 참

ㄴ. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는 $0,1,2,3,4$만이 올 수 있으므로 $0 \le f(n) \le 4$ $\therefore$ 참

ㄷ. $f(n)=2$ 이므로

$n^2=p_k5^k+p_{k-1}5^{k-1}+\cdots+p_25^2+p_1\cdot5+2$

$(p_i=0,1,2,3,4)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.

그런데 정수 l에 대하여

i) $n=5l$이면 $n^2=25l^2$

즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.

ii) $n=5l+1$이면 $n^2=(5l+1)^2=25l^2+10l+1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

iii) $n=5l+2$이면 $n^2=(5l+2)^2=25l^2+20l+4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

iv) $n=5l+3$이면 $n^2=(5l+3)^2=25l^2+30l+5+4$

즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.

v) $n=5l+4$이면 $n^2=(5l+4)^2=25l^2+40l+15+1$

즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.

모든 자연수 n은 i), ii), iii), iv), v)중 어느 한 꼴로 표현이 가능하므로 5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.

$\therefore$ 참

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　② 2　③ -1　④ -2　⑤ -3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}$$
$$=\frac{1+3}{1-3}=-2$$
$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}$$
$$=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$
$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$
$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

25. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, 함수 $f:X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개　② 20 개　③ 24 개　④ 28 개　⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \le 1$
$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \le 2$
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \le 3$
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \le 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

26. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^{1=}f,\ f^{n+1}=f\circ f^{n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$f(-2)=\frac{6+1}{-2+3}=7$$

$$f^{2}(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$$

$$f^{3}(-2)=f(f^{2}(-2))=f(-2)=7$$

$$f^{4}(-2)=f(f^{3}(-2))=f(7)=-2$$

$$\vdots$$

$$f^{2006}(-2)=-2$$

$$f^{2007}(-2)=7$$

$$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$$

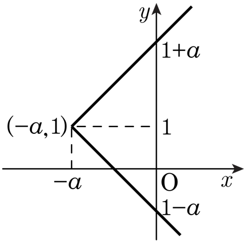
27. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$를
x 축 음의 방향으로 a,
y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4 \qquad \therefore\ a=2(a>0)$



28. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

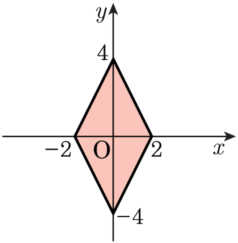
▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$,
즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서
$x\geq 0,\ y\geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각
각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $8\times 4\times \frac{1}{2}=16$



29. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$

④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

30. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f\ :\ R\ \to\ R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$

② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$

④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

31. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

32. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{45}{51}$ ② $\dfrac{46}{51}$ ③ $\dfrac{47}{51}$ ④ $\dfrac{48}{51}$ ⑤ $\dfrac{49}{51}$

해설

$$\therefore f(25) = \frac{2 \times 25 - 1}{2 \times 25 + 1} = \frac{49}{51}$$

33. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x) = 2x + 1$로 정의될 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 24

해설

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$
$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$
$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$
$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$ 이므로
함수 f의 치역은 $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

34. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$$

로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = (2-x)+\{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x)+f(2-x) = x+(2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x)+f(2-x) = 2$

35. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1) - 2$

$\therefore f(1) = 2$

㉠에 $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$