1. $2(x-1)^2+3=ax^2-4x+5$ 가 이차방정식일 때, a 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2(x^2-2x+1)+3=ax^2-4x+5$

$2x^2-4x+2+3=ax^2-4x+5$

$(2-a)x^2=0$

$\therefore\ a\neq 2$

2. x 에 관한 이차방정식 $ax^2 + px - ap - 2q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 2$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x = 2$ 가 근이므로 $4a + 2p - ap - 2q = 0$ 이고 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$(4 - p)\,a + 2\,(p - q) = 0$ 에 의하여 $p = 4,\ q = 4$ 이다.

$\therefore p + q = 8$

3. 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 한 근이 α 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha}-\dfrac{3\alpha}{1-\alpha^2}$ 의 값을 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 0 ⑤ -2

해설

이차방정식 $x^2-x-1=0$ 에 $x=\alpha$ 를 대입하면,

$\alpha^2-\alpha-1=0 \Rightarrow 1+\alpha=\alpha^2,\ 1-\alpha^2=-\alpha$

$\therefore \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha}-\dfrac{3\alpha}{1-\alpha^2}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2}-\dfrac{3\alpha}{-\alpha}=1+3=4$

4. 다음의 이차방정식에서 양의 근들의 합은?

㉠ $(2x+1)(3x-1)=0$

㉡ $2x(x-1)=0$

㉢ $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

㉠ $2x+1=0$ 또는 $3x-1=0$ $\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

㉡ $2x=0$ 또는 $x-1=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

㉢ $x-\frac{1}{2}=0$ 또는 $x-\frac{2}{3}=0$ $\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 양의 근만 모두 더하면 $\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$

5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 일 때, $\begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = x + 17$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -\frac{3}{2}$

▷ 정답: $x = 7$

해설

$\begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = x + 17$

$2x(x-3) - 4(x+1) = x + 17$

$2x^2 - 6x - 4x - 4 = x + 17$

$2x^2 - 11x - 21 = 0$

$(x-7)(2x+3) = 0$

따라서 $x = 7$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$ 이다.

6. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{3}$ 일 때, k 의 값과 다른 근을 구하면?

① $k = 0,\ 1 - \sqrt{3}$ ② $k = 1,\ 2 + \sqrt{3}$ ③ $k = 2,\ 1 + \sqrt{3}$
④ $k = 3,\ 1 - \sqrt{3}$ ⑤ $k = 4,\ 2 + \sqrt{3}$

해설

한 근 $2 - \sqrt{3}$ 을 대입하여 k 를 구하면 $k = 1$
$x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 $x = 2 \pm \sqrt{3}$
따라서 다른 한 근은 $2 + \sqrt{3}$

7. 이차방정식 $ax^2+(5-4b)x-6=0$의 한 해가 $x=1$일 때, 상수 $a-4b$의 값은?

① 15 ② -8 ③ 1 ④ 8 ⑤ 15

해설

이차방정식 $ax^2+(5-4b)x-6=0$에 $x=1$을 대입하면,
$a+5-4b-6=0$
$\therefore\ a-4b=1$

8. 두 이차방정식 $2x^2+3x-2=0$, $2x^2+7x+6=0$의 공통인 해를 구하면?

① $x=-2$ ② $x=-1$ ③ $x=0$

④ $x=1$ ⑤ $x=2$

해설

$2x^2+3x-2=0$

$(2x-1)(x+2)=0$

$x=\frac{1}{2}$, $x=-2$

$2x^2+7x+6=0$

$(2x+3)(x+2)=0$

$x=-\frac{3}{2}$, $x=-2$

따라서 공통인 해는 $x=-2$

9. 다음 이차방정식 중 중근을 갖지 <u>않는</u> 것을 모두 고르면?

① $x^2 - 1 = 0$　　② $x^2 = 12x - 36$

③ $2(x+4)^2 = 8$　　④ $x^2 = 6(x - \frac{3}{2})$

⑤ $1 - \frac{1}{3}x^2 = 2(x+2)$

해설

① $x^2 - 1 = 0$에서 $(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$

③ $2(x+4)^2 = 8$에서 $x^2 + 8x + 12 = 0$, $(x+2)(x+6) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = -6$

10. 이차방정식 $(x-2)^2=5$ 의 두 근의 곱을 구하면?

① -7 ② -5 ③ -3 ④ -1 ⑤ 1

해설

$(x-2)^2=5,\ x-2=\pm\sqrt{5},\ x=2\pm\sqrt{5}$
따라서 두 근의 곱은 $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=4-5=-1$ 이다.

11. 이차방정식 $(x+5)(x-3)=5$ 를 $(x+p)^2=q$ 의 꼴로 나타낼 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: 22

해설

$(x+5)(x-3)=5,\ x^2+2x-15=5$
$x^2+2x=20,\ (x+1)^2=21$
$p=1,\ q=21$
$\therefore p+q=22$

12. 다음 중 이차방정식과 해가 잘못 짝지어진 것은?

① $(x+1)^2=5 \rightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$

② $3x^2-6x-5=0 \rightarrow x=1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

③ $\dfrac{1}{2}x^2-3=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

④ $\dfrac{1}{2}x^2-x-1=0 \rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

⑤ $2(x-5)^2-1=0 \rightarrow x=5\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

해설

② $3x^2-6x-5=0, 3(x^2-2x)=5$

$3(x^2-2x+1)=5+3$

$3(x-1)^2=8$

$\therefore x=1\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

13. 이차방정식 $x^2 + a = 0$ 의 근이 존재할 때, 다음 중 a 의 값이 될 수 없는 것은?

① 12 ② 0 ③ -3 ④ -5 ⑤ -12

해설

$x^2 = -a$ 의 근이 존재하려면 $-a \geq 0$, $a \leq 0$

14. 이차방정식 $4x^2 - 7x - A = 0$ 의 해가 $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{129}}{B}$ 일 때, $A - B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 16A}}{8} = \dfrac{7 \pm \sqrt{129}}{B}$ 에서

$A = 5$, $B = 8$

$\therefore\ A - B = 5 - 8 = -3$

15. 이차방정식 A의 두 근 중 큰 근이 다른 이차방정식 B의 근일 때, a의 값을 구하여라.

A : $(x+2)^2 - 2(x+2) - 15 = 0$
B : $2x^2 + ax - 5a = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x+2=t$로 치환하면 $t^2 - 2t - 15 = 0$
$(t-5)(t+3) = 0$, $t = 5$ 또는 $t = -3$
$t = x+2 = 5$, $t = x+2 = -3$에서 $x = 3$ 또는 $x = -5$
따라서 큰 근은 3이다.
$x = 3$을 $2x^2 + ax - 5a = 0$에 대입하면
$18 + 3a - 5a = 0$
$\therefore\ a = 9$

16. 임의의 실수 x 의 정수 부분이 a 일 때, $[x] = a$ 로 나타내기로 한다. $2 \le x < 3$ 일 때, 방정식 $[x]x^2 - x - 5[x] = 0$ 의 해는?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$2 \le x < 3$ 이므로 $[x] = 2$ 이다.
$[x] = 2$ 를 대입하면 $2x^2 - x - 10 = 0$ 이고, 인수분해를 하면 $(2x-5)(x+2) = 0$ 이다.
$\therefore x = \frac{5}{2}$ $(\because 2 \le x < 3)$

17. 다음 이차방정식의 근을 구하면?

$$0.5(x-2)(x+1)=\frac{1}{3}(x-2)^2$$

① 1, −7 ② −7, 2 ③ −4, 9 ④ 3, −5 ⑤ 14, 1

해설

양변에 6을 곱하면

$3(x-2)(x+1)=2(x-2)^2$

$3x^2-3x-6=2x^2-8x+8$

$x^2+5x-14=0$

$(x+7)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=2$

18. 두 이차방정식 $x^2-12x+a=0$, $(x-b)^2=0$의 근이 같고 근의 개수는 1개일 때, $a+b$ 의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

$x^2-12x+a=0$은 중근을 가지고, $(x-b)^2=0$ 도 같은 근을 가진다.
따라서 $a=36$, $b=6$ 이므로
$a+b=42$ 이다.

19. 이차방정식 $x^2+8x-20=0$ 의 두 근을 m, n 이라 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라 기호로 써라.

보기

㉠ $m^2+n^2=104$　　㉡ $(m-n)^2=m^2n^2$

㉢ $|n-m|\geq -3mn$　　㉣ $\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}=-\dfrac{26}{5}$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉣

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-8, mn=-20$ 이다.

㉠ : $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=64-2(-20)=104$

㉡ : $(m-n)^2=(m+n)^2-4mn$

$=(-8)^2-4(-20)$

$=64+80$

$=144\neq m^2n^2$

㉢ : ㉡에 의해

$|n-m|+3mn=|\pm 12|-60<0$

㉣ : $\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}=\dfrac{104}{-20}=-\dfrac{26}{5}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣이다.

20. 이차방정식 $x^2 - ax - a + 2 = 0$ 의 두 개의 서로 다른 실수의 근을 p, q 라고 할 때 $p^2 + q^2 = 11$ 을 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$p + q = a,\ pq = -a + 2$
$p^2 + q^2 = 11$
$(p + q)^2 - 2pq = 11$
$a^2 - 2(-a + 2) = 11$
$a^2 + 2a - 15 = 0$
$(a + 5)(a - 3) = 0$
$\therefore a = -5,\ 3$
한편, $x^2 - ax - a + 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실수의 근을 가지므로
$D = (-a)^2 - 4(-a + 2) > 0$ 이다.
$a^2 + 4a - 8 > 0$ 이어야 하는데 -5 는 위 부등식을 만족시키지 않는다.
$\therefore a = 3$

21. 이차방정식 $4x^2+8x+5=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 이차방정식 $x^2+bx+c=0$ 의 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ 이다. 이 때, $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{5}{4}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

$x^2+bx+c=0$ 의 근이 $-2,\ \frac{3}{2}$ 이므로

$-b=-2+\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$c=-2\times\frac{3}{2}=-3$

$\therefore\ b+c=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$

22. 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 두 근은 연속하는 홀수이다. 두 근의 제곱의 차가 24일 때, $n-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 47

해설

$x^2+mx+n=0$ 의 두 근을 $a,\ a+2$ (단, a 는 홀수)로 놓으면
$m=-2a-2,\ n=a^2+2a$
$(a+2)^2-a^2=24$
$4a+4=24, 4a=20,\ a=5$
$m=-2\times5-2=-12$
$\therefore n=25+10=35$
$\therefore\ n-m=35+12=47$

23. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$을 철수는 상수항을 잘못보고 풀어서 근이 -3, 7이 나왔고, 영희는 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 근이 2, -6이 나왔다. 올바른 이차방정식의 근을 구했을 때 두 근의 곱은?

① 4 ② 8 ③ -8 ④ 12 ⑤ -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로 근과 계수와의 관계에서
$a = -3 + 7 = 4$
영희는 일차항의 계수를 잘못 보았으므로
$b = 2 \times (-6) = -12$
따라서 $x^2 - 4x - 12 = 0$, $(x+2)(x-6) = 0$, $x = -2$ 또는 $x = 6$
$\therefore$ 두 근의 곱은 -12

해설

철수는 상수항을 잘못 보았으므로
$(x+3)(x-7) = 0$, $x^2 - 4x - 21 = 0$ 에서 일차항의 계수는 -4
영희는 일차항의 계수를 잘못보았으므로
$(x-2)(x+6) = 0$, $x^2 + 4x - 12 = 0$ 에서 상수항은 -12
따라서 올바른 방정식은 $x^2 - 4x - 12 = 0$ $(x-6)(x+2) = 0$, $x = 6, -2$
$\therefore$ 두 근의 곱은 -12

24. 이차방정식 $4x^2 - kx + 9 = 0$ 이 중근을 가질 때, 두 양의 정수 k, $k-5$ 를 두 근으로 하는 이차방정식 A 는? (단, A 의 이차항의 계수는 1 이다.)

① $x^2 + 19x + 84 = 0$ ② $x^2 - 19x - 84 = 0$

③ $x^2 - 84x + 19 = 0$ ④ $x^2 - 19x + 84 = 0$

⑤ $x^2 - 20x + 84 = 0$

해설

$4x^2 - kx + 9 = 0$ 이 중근을 가지므로
$k^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$
$k = 12$ ($\because$ $k > 0$)
따라서 두 근은 12, 7
$\therefore$ $(x-12)(x-7) = 0$
$\therefore$ $x^2 - 19x + 84 = 0$

25. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수를 정하는데, 안이 보이지 않는 상자에 $0 \sim 9$ 까지의 숫자가 적힌 공을 넣어 첫 번째 뽑힌 숫자를 a, 두 번째 뽑힌 숫자를 b 로 정했다고 한다. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 근이 1 개일 확률이 $\frac{t}{s}$ 라고 할 때, $t+s$ 의 값을 구하여라. (단, t, s 는 서로소이고, 첫 번째 뽑은 공은 다시 상자 안에 넣고 두 번째 공을 뽑는다.)

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

중근을 가지려면 $x^2+ax+b=0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b,\ a^2 = 4b$

이를 만족하는 $(a,\ b)$ 를 구하면

$(a,\ b) = (0,\ 0),\ (2,\ 1),\ (4,\ 4),\ (6,\ 9)$ 의 네 가지이고 모든 경우의 수는 100 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ 이다.

$\therefore t=1,\ s=25$ 이므로 $t+s=26$ 이다.