

1. 세 점 $(0, 8)$, $(1, -2)$, $(3, -10)$ 을 지나는 포물선의 축의 방정식은?

① $x = 1$

② $x = 2$

③ $x = 3$

④ $x = 4$

⑤ $x = 5$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 로 놓고 세 점 $(0, 8)$, $(1, -2)$, $(3, -10)$ 을 각각 대입하면

$$c = 8, a + b + 8 = -2, 9a + 3b + 8 = -10$$

$$\therefore a = 2, b = -12, c = 8$$

$y = 2x^2 - 12x + 8 = 2(x - 3)^2 - 10$ 따라서 축의 방정식은 $x = 3$ 이다.

2. 세 점 $(0, -6)$, $(2, 0)$, $(-2, 4)$ 를 지나는 이차함수의 식은?

① $y = 2x^2 - x - 6$

② $y = 2x^2 + x - 6$

③ $y = 2x^2 + x + 6$

④ $y = -2x^2 - x - 6$

⑤ $y = -2x^2 + x + 6$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면

$$c = -6, 4a + 2b + c = 0, 4a - 2b + c = 4$$

$$a = 2, b = -1, c = -6$$

$$\therefore y = 2x^2 - x - 6$$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 2)$ 이고 점 $(1, -2)$ 와 $(-1, 4)$ 를 지날 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = a + b + c$ 이다.

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $c = 2$

점 $(-1, 4)$ 를 지나므로 $a - b + c = 4$

$\therefore a = -1, b = -3, c = 2$

4. 이차함수 $y = -x^2 - 2(a-1)x + 1$ 은 $x = 2$ 일 때, 최댓값이 k 이다.
 $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

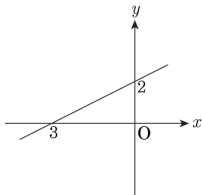
$$\begin{aligned}y &= -\{x^2 + 2(a-1)x\} + 1 \\&= -\{x + (a-1)\}^2 + 1 + (a-1)^2 \\&= -\{x + (a-1)\}^2 + a^2 - 2a + 2\end{aligned}$$

대칭축이 $x = 2$ 이므로

$$-(a-1) = 2$$

$$a = -1, \text{ 최댓값 } k = a^2 - 2a + 2 = 5 \therefore a + k = 4$$

5. 다음 그래프는 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

해설

$$a = \frac{2}{3}, b = 2$$

$y = -\frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$ 에 a, b 의 값을 대입하면

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 4$$

$x = 3$ 일때, 최댓값 4 를 가지며 최솟값은 없다.

6. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 ,그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned}y &= -(x-2)(x+6) \\&= -(x^2 + 4x - 12) \\&= -(x+2)^2 + 16\end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.

$a = 16$, $b = -2$ 이므로 $a+b = 14$ 이다.

7. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -3x^2 + 6x + 4a \\&= -3(x - 1)^2 + 3 + 4a\end{aligned}$$

$y = -3(x - 1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지나므로
 $2a - 7 = -3(-a - 1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a + 7)(a - 1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3, 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - 2)^2 + 4$$

$$\text{점 } (3, 6) \text{ 을 지나므로 } a(3 - 2)^2 + 4 = 6$$

$$\therefore a = 2$$

9. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

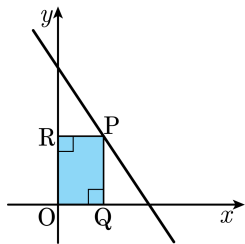
i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

10. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

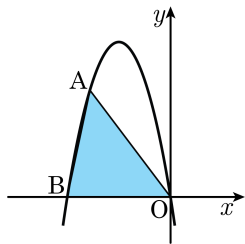
$$\begin{aligned}\square\text{OQPR} &= ab = a\left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square\text{OQPR}$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

11. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라

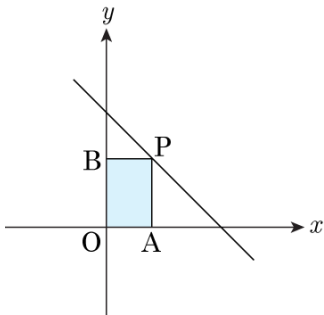
고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의

넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

12. 다음 그림과 같이 일차함수 $y = -x + 4$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A의 좌표를 $(t, 0)$ 이라고 하면 P의 좌표는 $(t, -t + 4)$ 이고 B의 좌표는 $(0, -t + 4)$

$$\therefore \square OAPB = t \times (-t + 4) = -t^2 + 4t = -(t - 2)^2 + 4$$

$t = 2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4

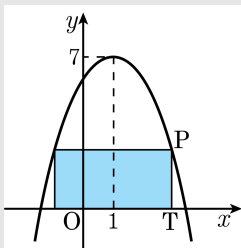
13. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

(둘레의 길이) $= 2\{2(t - 1) - t^2 + 2t + 5\}$

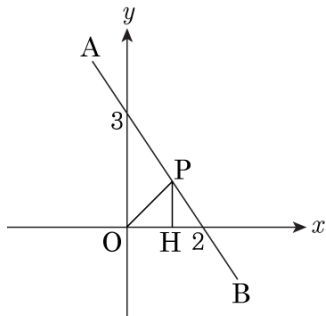
$$= 2(-t^2 + 4t + 3)$$

$$= -2t^2 + 8t + 6$$

$$= -2(t - 2)^2 + 14$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

14. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle POH$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$ 을 지나므로

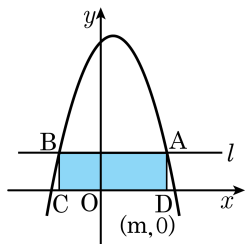
$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

H 점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $(a, -\frac{3}{2}a + 3)$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle POH &= \frac{1}{2} \times a \times \left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a - 1)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

15. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



① $\frac{11}{2}$

② $\frac{31}{4}$

③ 10

④ $\frac{49}{4}$

⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로 길이는 $-m^2 + m + 6$
($\square ABCD$ 둘레의 길이)

$$= 2\left\{2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\right\}$$

$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.