1. 세 점 $(0,\ -6)$, $(1,\ -2)$, $(-1,\ -8)$ 을 지나는 포물선의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = x^2 + 3x - 6$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면

$-6 = c \cdots$ ①

$-2 = a + b + c \cdots$ ②

$-8 = a - b + c \cdots$ ③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a = 1,\ b = 3,\ c = -6$

$\therefore\ y = x^2 + 3x - 6$

2. 세 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ -3)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 포물선의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 꼭짓점의 좌표 : $\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

▷ 정답 : 축의 방정식 : $x = \frac{2}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 각 점을 대입하면

$a + b + c = 2,\ 4a + 2b + c = -3,\ c = 1$

$a = -3,\ b = 4,\ c = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ y &= -3x^2 + 4x + 1 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 1 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 1 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

3. 세 점 $(0,\ -6)$, $(2,\ 0)$, $(-2,\ 4)$ 를 지나는 이차함수의 식은?

① $y = 2x^2 - x - 6$ ② $y = 2x^2 + x - 6$
③ $y = 2x^2 + x + 6$ ④ $y = -2x^2 - x - 6$
⑤ $y = -2x^2 + x + 6$

해설
$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면
$c = -6,\ 4a + 2b + c = 0,\ 4a - 2b + c = 4$
$a = 2,\ b = -1,\ c = -6$
$\therefore\ y = 2x^2 - x - 6$

4. $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 의 그래프가 x 축과 점 $(3,\ 0)$ 에서 만날 때, 이차함수의 최댓값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(3,\ 0)$ 을 $y = -x^2 + 4x - a + 3$ 에 대입하면

$0 = -9 + 12 - a + 3$

$\therefore\ a = 6$

$y = -x^2 + 4x - 3$

$\quad = -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3$

$\quad = -(x - 2)^2 + 1$

$\therefore x = 2$ 일 때, 최댓값 1

5. 이차함수 $y = x(4-x)$ 는 $x = p$ 일 때, 최댓값 q 를 갖는다. $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x(4-x) = -x^2 + 4x$
$= -(x-2)^2 + 4$
따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.
$p = 2,\ q = 4$
$\therefore p + q = 2 + 4 = 6$

6. 이차함수 $y = (x-1)(x+5)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$ 일 때, 최솟값 -9

해설

$y = (x-1)(x+5)$

$y = x^2 + 4x - 5$

$y = (x+2)^2 - 9$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 -9 를 가지며 최댓값은 없다.

7. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 최댓값이 8 일 때, 상수 k 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + 4 + k$
최댓값이 8 이므로
$4 + k = 8 \quad \therefore k = 4$

8. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)

▶ 답:

▷ 정답: $a = -1$

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$
$= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax)$
$= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2$
최솟값 $-8a^2 = -8$, $a^2 = 1$
$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

9. 이차함수 $y=2x^2-4x+1+k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y=2x^2-4x+1+k=2(x-1)^2-1+k$

최솟값이 4 이므로 $-1+k=4$

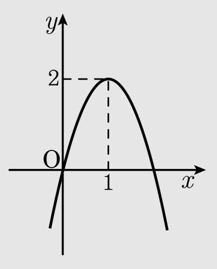
$\therefore k=5$

10. 다음 중 이차함수 $y=-2x^2+4x$의 그래프가 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제 1, 3사분면

해설

$y=-2x^2+4x$
$=-2(x^2-2x+1-1)$
$=-2(x-1)^2+2$



그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,2)$이고 y절편은 0이다.

11. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 않는 것은?

① $y=-3x^2+1$ ② $y=-(x-1)^2$

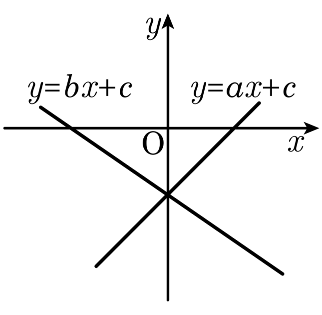
③ $y=-2(x+2)^2+1$ ④ $y=2(x-1)^2+2$

⑤ $y=-3(x+3)^2+4$

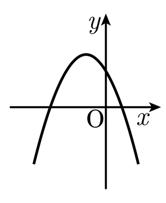
해설

② $y=-(x-1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, 위로 볼록이므로 제2 사분면을 지나지 않는다.

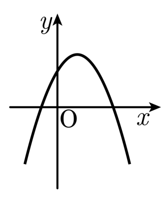
12. 두 일차함수 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = ax^2 - bx - c$ 의 그래프로 적당한 것은?



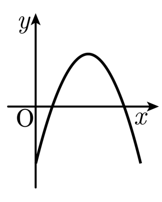
①



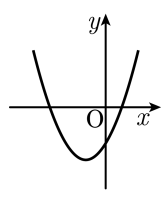
②



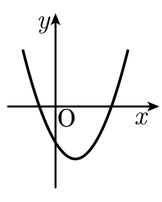
③



④



⑤



해설

$y = ax + c$ 에서 $a > 0,\ c < 0$

$y = bx + c$ 에서 $b < 0,\ c < 0$ 이므로

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는

$a > 0$ 이므로 아래로 볼록한 모양이고

$-\dfrac{b}{2a} > 0$ 이므로 축의 방정식 $x = p > 0$ 이고

$c < 0$ 이므로 y절편 < 0 이다.

따라서 적당한 그래프는 ⑤이다.

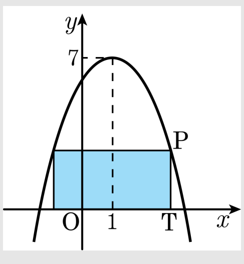
13. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

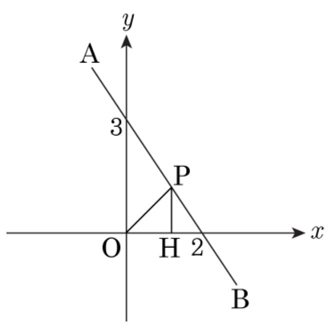
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1) - t^2 + 2t + 5\} \\
&= 2(-t^2 + 4t + 3) \\
&= -2t^2 + 8t + 6 \\
&= -2(t-2)^2 + 14
\end{aligned}
$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

14. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle$POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0,\ 3)$, $(2,\ 0)$ 을 지나므로

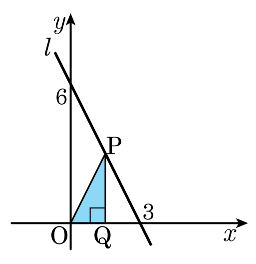
$y=-\frac{3}{2}x+3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $(a, -\frac{3}{2}a+3)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{POH} &= \frac{1}{2}\times a\times\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\ &= -\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a\\ &= -\frac{3}{4}(a^2-2a+1-1)\\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

15. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{POQ} = \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}a(-2a+6)\\ &= -a^2 + 3a\\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.