1. 세 점 $(0,\ -6)$, $(1,\ -2)$, $(-1,\ -8)$ 을 지나는 포물선의 식을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $y = x^2 + 3x - 6$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입하면

$-6 = c \cdots ①$

$-2 = a + b + c \cdots ②$

$-8 = a - b + c \cdots ③$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a = 1,\ b = 3,\ c = -6$

$\therefore\ y = x^2 + 3x - 6$

2. 세 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ -3)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 포물선의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 꼭짓점의 좌표 : $\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

▷ 정답 : 축의 방정식 : $x = \frac{2}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 각 점을 대입하면

$a + b + c = 2,\ 4a + 2b + c = -3,\ c = 1$

$a = -3,\ b = 4,\ c = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ y &= -3x^2 + 4x + 1 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 1 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 1 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}\end{aligned}$$

3. 세 점 $(0,\ -6)$, $(2,\ 0)$, $(-2,\ 4)$ 를 지나는 이차함수의 식은?

① $y=2x^2-x-6$　② $y=2x^2+x-6$

③ $y=2x^2+x+6$　④ $y=-2x^2-x-6$

⑤ $y=-2x^2+x+6$

해설

$y=ax^2+bx+c$ 에 세 점을 대입하면

$c=-6,\ 4a+2b+c=0,\ 4a-2b+c=4$

$a=2,\ b=-1,\ c=-6$

$\therefore\ y=2x^2-x-6$

4. $y=-x^2+4x-a+3$ 의 그래프가 x 축과 점 $(3,\ 0)$ 에서 만날 때, 이차함수의 최댓값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(3,\ 0)$ 을 $y=-x^2+4x-a+3$ 에 대입하면

$0=-9+12-a+3$

$\therefore\ a=6$

$y=-x^2+4x-3$

$\quad=-(x^2-4x+4-4)-3$

$\quad=-(x-2)^2+1$

$\therefore x=2$ 일 때, 최댓값 1

5. 이차함수 $y = x(4-x)$ 는 $x = p$ 일 때, 최댓값 q 를 갖는다. $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = x(4-x) = -x^2 + 4x$$
$$= -(x-2)^2 + 4$$

따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

$p = 2,\ q = 4$

$\therefore p + q = 2 + 4 = 6$

6. 이차함수$y = (x-1)(x+5)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$ 일 때, 최솟값 -9

해설

$y = (x-1)(x+5)$
$y = x^2 + 4x - 5$
$y = (x+2)^2 - 9$
$x = -2$ 일 때, 최솟값 -9 를 가지며 최댓값은 없다.

7. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 최댓값이 8 일 때, 상수 k 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + 4 + k$

최댓값이 8 이므로

$4 + k = 8 \quad \therefore k = 4$

8. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + 4ax \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax) \\ &= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2 \end{aligned}$$

최솟값 $-8a^2 = -8,\ a^2 = 1$

$\therefore a = -1(\because a < 0)$

9. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1 + k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = 2x^2 - 4x + 1 + k = 2(x-1)^2 - 1 + k$

최솟값이 4 이므로 $-1 + k = 4$

$\therefore k = 5$

10. 다음 중 이차함수 $y=-2x^2+4x$의 그래프가 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면

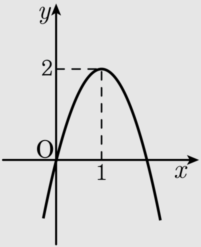
④ 제4사분면 ⑤ 제 $1, 3$사분면

해설

$y=-2x^2+4x$

$=-2(x^2-2x+1-1)$

$=-2(x-1)^2+2$



그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$이고 y절편은 0이다.

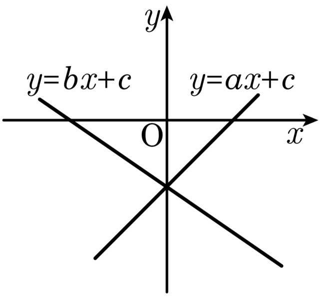
11. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 <u>않는</u> 것은?

① $y=-3x^2+1$
② $y=-(x-1)^2$
③ $y=-2(x+2)^2+1$
④ $y=2(x-1)^2+2$
⑤ $y=-3(x+3)^2+4$

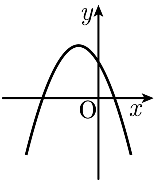
해설

② $y=-(x-1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, 위로 볼록이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

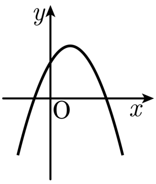
12. 두 일차함수 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = ax^2 - bx - c$ 의 그래프로 적당한 것은?



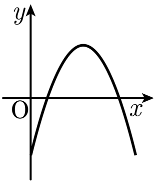
①



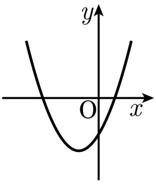
②



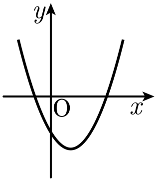
③



④



⑤



해설

$y = ax + c$ 에서 $a > 0$, $c < 0$
$y = bx + c$ 에서 $b < 0$, $c < 0$ 이므로
$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는
$a > 0$ 이므로 아래로 볼록한 모양이고
$-\dfrac{b}{2a} > 0$이므로 축의 방정식 $x = p > 0$ 이고
$c < 0$ 이므로 y절편 < 0 이다.
따라서 적당한 그래프는 ⑤이다.

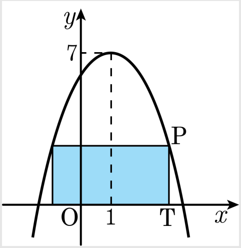
13. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

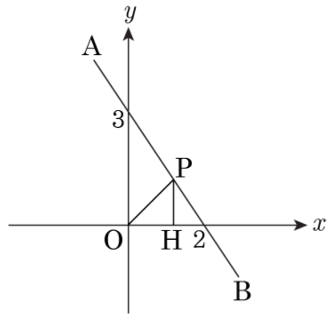


포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1)-t^2+2t+5\}\\ &= 2(-t^2+4t+3)\\ &= -2t^2+8t+6\\ &= -2(t-2)^2+14\end{aligned}$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

14. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle$POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0,\ 3)$, $(2,\ 0)$ 을 지나므로

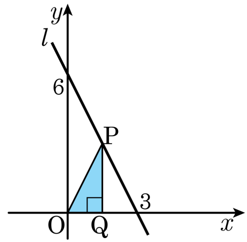
$y = -\frac{3}{2}x + 3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $(a, -\frac{3}{2}a + 3)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{POH} &= \frac{1}{2} \times a \times (-\frac{3}{2}a + 3) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

15. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\triangle \mathrm{POQ} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$= -a^2 + 3a$$
$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.