1. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)$ $a=-\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii)$ $a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

따라서 $a=3$ 이다.

2. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + 2$ 에서 $a > 0$ 이고, $x = -2$ 에서 최솟값을 가질 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = ax^2 + 4x + 2$$
$$= a\left\{\left(x + \frac{4}{2a}\right)^2 - \frac{16}{4a^2}\right\} + 2$$
$$= a(x + \frac{4}{2a})^2 - \frac{16}{4a} + 2$$

$a > 0$ 이므로 아래로 볼록한 그래프이고, $x = -2$ 일 때, 최솟값을 가진다.

$\left(-2 + \frac{4}{2a}\right) = 0$ 이므로 $a = 1$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 (3, 6) 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = ax^2 + bx + c$
$= a(x-2)^2 + 4$
점 (3, 6) 을 지나므로 $a(3-2)^2 + 4 = 6$
$\therefore a = 2$

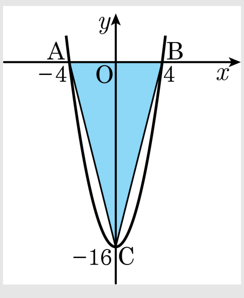
4. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

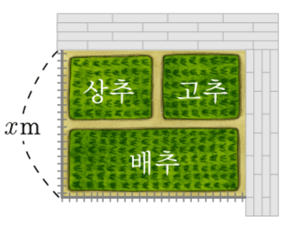
x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

5. 다음 그림과 같이 길이가 10m 인 철망으로 텃밭을 만들려고 한다. 담장을 이용하여 직사각형 모양의 텃밭을 만들 때, 이 텃밭의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $25\,\mathrm{m}^2$

해설

텃밭의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(10-x) \\ &= -x^2+10x \\ &= -(x^2-10x+25)+25 \\ &= -(x-5)^2+25 \end{aligned}$$

$\therefore$ (최대 넓이) $= 25\,\mathrm{m}^2$

6. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm
② 가로 7 cm, 세로 7 cm
③ 가로 8 cm, 세로 9 cm
④ 가로 8 cm, 세로 8 cm
⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

해설

가로의 길이를 x cm , 세로의 길이를 $(14-x)$ cm , 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면

$y = x(14-x)$
$= -x^2 + 14x$
$= -(x^2 - 14x + 49 - 49)$
$= -(x-7)^2 + 49$

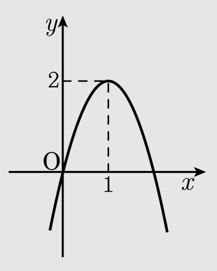
따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 $49\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다

7. 다음 중 이차함수 $y=-2x^2+4x$의 그래프가 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제1사분면　② 제2사분면　③ 제3사분면
④ 제4사분면　⑤ 제 1, 3사분면

해설

$y=-2x^2+4x$
$=-2(x^2-2x+1-1)$
$=-2(x-1)^2+2$



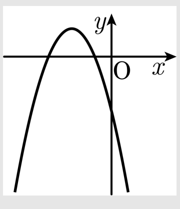
그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,2)$이고 y절편은 0이다.

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$이고, $p < 0$, $q > 0$, $a < 0$, $c < 0$ 일 때, 이 이차함수의 그래프가 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제1 사분면　　② 제2 사분면
③ 제3 사분면　　④ 제4 사분면
⑤ 제1 사분면과 제2 사분면

해설

꼭짓점은 제2 사분면에 있고, y 절편이 음수이고, 위로 볼록한 그래프를 그려 본다.



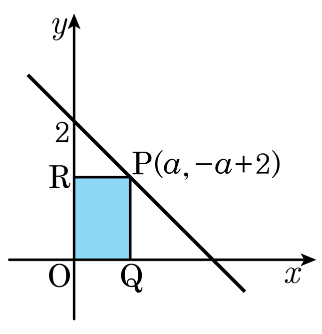
따라서 제1 사분면을 지나지 않는다.

9. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 않는 것은?

① $y=-3x^2+1$　② $y=-(x-1)^2$
③ $y=-2(x+2)^2+1$　④ $y=2(x-1)^2+2$
⑤ $y=-3(x+3)^2+4$

해설
② $y=-(x-1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, 위로 볼록이므로 제2 사분면을 지나지 않는다.

10. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 이고 넓이는 y 이므로

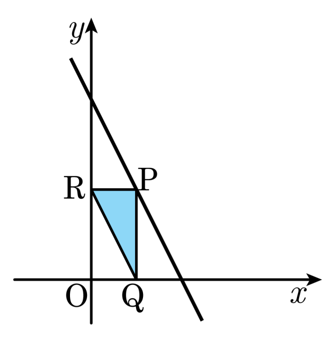
$y=a(-a+2)=-a^2+2a$

$=-(a^2-2a+1)+1$

$=-(a-1)^2+1$

따라서 y의 최댓값은 1이다.

11. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x+6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle$PRQ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

P$(a,\ -2a+6)$, Q$(a,\ 0)$, R$(0, -2a+6)$

$\triangle$PRQ 의 넓이를 y 라 하면

$y = \frac{1}{2}a(-2a+6)$

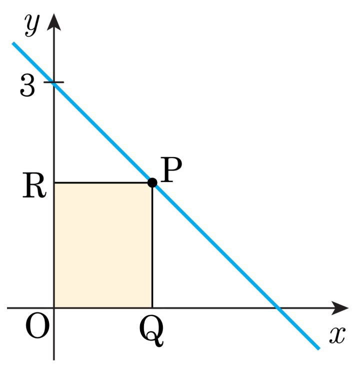
$= -a^2+3a$

$= -\left(a^2-3a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)$

$= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

$a = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$

12. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+3$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

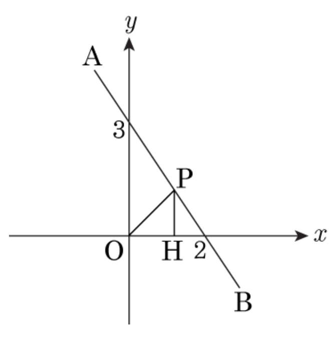
해설

점 P 의 좌표는 $(x, -x+3)$ 이고 넓이는 y 이므로

$y=x(-x+3)=-x^2+3x=-(x^2-3x+\frac{9}{4})+\frac{9}{4}$

따라서 y의 최댓값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

13. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle$POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지나는 직선은 두 점 (0, 3) , (2, 0) 을 지나므로

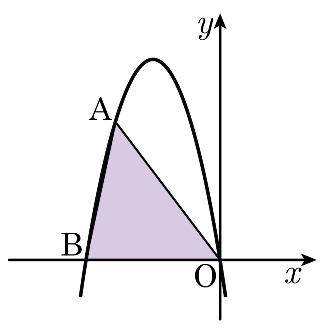
$y = -\frac{3}{2}x + 3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $(a, -\frac{3}{2}a + 3)$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle\mathrm{POH} &= \frac{1}{2} \times a \times (-\frac{3}{2}a + 3) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a - 1)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

14. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

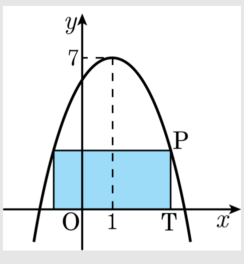
15. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1)-t^2+2t+5\} \\
&= 2(-t^2+4t+3) \\
&= -2t^2+8t+6 \\
&= -2(t-2)^2+14
\end{aligned}
$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.