

1. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$$i) a = -\frac{3}{8} \text{ 대입 :}$$

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$$ii) a = 3 \text{ 대입 : } -12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$$

따라서 $a = 3$ 이다.

2. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + 2$ 에서 $a > 0$ 이고, $x = -2$ 에서 최솟값을 가질 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + 4x + 2 \\&= a \left\{ \left(x + \frac{4}{2a} \right)^2 - \frac{16}{4a^2} \right\} + 2 \\&= a \left(x + \frac{4}{2a} \right)^2 - \frac{16}{4a} + 2\end{aligned}$$

$a > 0$ 이므로 아래로 볼록한 그래프이고, $x = -2$ 일 때, 최솟값을 가진다.

$$\left(-2 + \frac{4}{2a} \right) = 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3, 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - 2)^2 + 4$$

$$\text{점 } (3, 6) \text{ 을 지나므로 } a(3 - 2)^2 + 4 = 6$$

$$\therefore a = 2$$

4. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

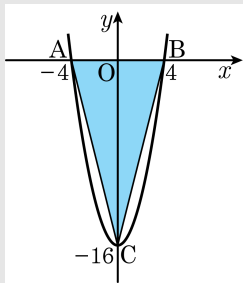
▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

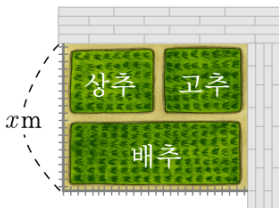
x 축과의 교점 A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.

꼭짓점의 좌표는 $(0, -16)$ 이다.



구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

5. 다음 그림과 같이 길이가 10m 인 철망으로 텃밭을 만들려고 한다. 담장을 이용하여 직사각형 모양의 텃밭을 만들 때, 이 텃밭의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 25 m^2

해설

텃밭의 넓이를 $y \text{ m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 y &= x(10 - x) \\
 &= -x^2 + 10x \\
 &= -(x^2 - 10x + 25) + 25 \\
 &= -(x - 5)^2 + 25 \\
 \therefore (\text{최대 넓이}) &= 25 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

6. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm

② 가로 7 cm, 세로 7 cm

③ 가로 8 cm, 세로 9 cm

④ 가로 8 cm, 세로 8 cm

⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 $(14 - x)$ cm, 넓이를 y cm² 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(14 - x) \\&= -x^2 + 14x \\&= -(x^2 - 14x + 49 - 49) \\&= -(x - 7)^2 + 49\end{aligned}$$

따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 49 cm² 를 가진다

7. 다음 중 이차함수 $y = -2x^2 + 4x$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면

② 제2사분면

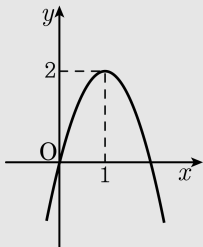
③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 제 1,3사분면

해설

$$\begin{aligned}y &= -2x^2 + 4x \\&= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\&= -2(x - 1)^2 + 2\end{aligned}$$



그래프의 꼭짓점의 좌표는 (1,2)이고 y절편은 0이다.

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 좌표가 (p, q) 이고, $p < 0, q > 0, a < 0, c < 0$ 일 때, 이 이차함수의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1 사분면

② 제2 사분면

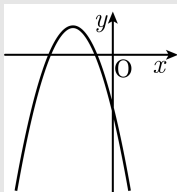
③ 제3 사분면

④ 제4 사분면

⑤ 제1 사분면과 제2 사분면

해설

꼭짓점은 제2 사분면에 있고, y 절편이 음수이고, 위로 볼록한 그래프를 그려 본다.



따라서 제1 사분면을 지나지 않는다.

9. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 않는 것은?

① $y = -3x^2 + 1$

② $y = -(x - 1)^2$

③ $y = -2(x + 2)^2 + 1$

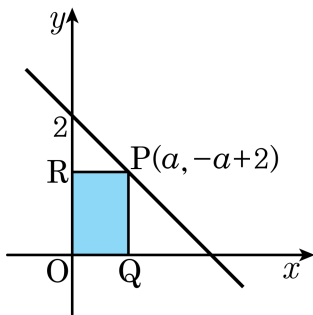
④ $y = 2(x - 1)^2 + 2$

⑤ $y = -3(x + 3)^2 + 4$

해설

② $y = -(x - 1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 (1, 0)이고, 위로 볼록이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

10. 다음 그림과 같이 직선 $y = -x + 2$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P 의 좌표는 $(a, -a + 2)$, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a + 2)$ 이고 넓이는 y 이므로

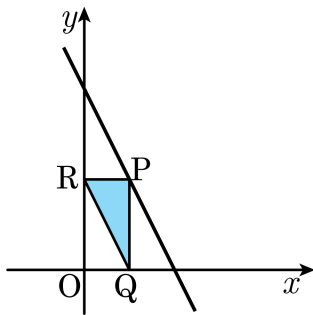
$$y = a(-a + 2) = -a^2 + 2a$$

$$= -(a^2 - 2a + 1) + 1$$

$$= -(a - 1)^2 + 1$$

따라서 y 의 최댓값은 1 이다.

11. 다음 그림과 같이 직선 $y = -2x + 6$ 위의 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, $\triangle PRQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하면? (단, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이다.)



① $\frac{9}{4}$

② $\frac{7}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

점 P 의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, -2a + 6), Q(a, 0), R(0, -2a + 6)$$

$\triangle PRQ$ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-2a + 6)$$

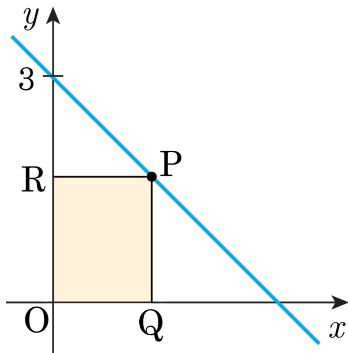
$$= -a^2 + 3a$$

$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)$$

$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 일 때 최댓값 } \frac{9}{4}$$

12. 다음 그림과 같이 직선 $y = -x + 3$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

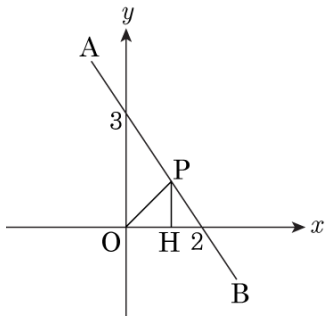
해설

점 P 의 좌표는 $(x, -x + 3)$ 이고 넓이는 y 이므로

$$y = x(-x + 3) = -x^2 + 3x = -(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + \frac{9}{4}$$

따라서 y 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

13. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle POH$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$ 을 지나므로

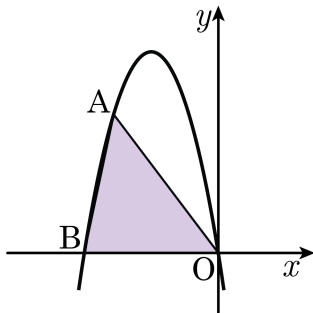
$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

H 점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $(a, -\frac{3}{2}a + 3)$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle POH &= \frac{1}{2} \times a \times \left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a - 1)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

14. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

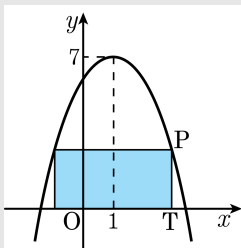
15. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

(둘레의 길이) $= 2\{2(t - 1) - t^2 + 2t + 5\}$

$$= 2(-t^2 + 4t + 3)$$

$$= -2t^2 + 8t + 6$$

$$= -2(t - 2)^2 + 14$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.