1. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　　② 20　　③ 10　　④ 7　　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

2. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 2(2x-3) > x+3 \\ 5x-9 < 3x+7 \end{cases}$$

① $2 < x < 8$ ② $3 < x < 9$ ③ $3 < x < 8$

④ $5 < x < 9$ ⑤ $4 < x < 10$

해설

i) $2(2x-3) > x+3$

$\Rightarrow\ 4x-6 > x+3$

$\Rightarrow\ x > 3$

ii) $5x-9 < 3x+7$

$\Rightarrow\ 2x < 16$

$\Rightarrow\ x < 8$

$\therefore\ 3 < x < 8$

3. 연립부등식 $5x+3 \leq x+19 < 3x+13$을 풀어라.

① $-3 \leq x < 4$ ② $-1 \leq x < 5$ ③ $2 < x \leq 3$

④ $3 < x \leq 4$ ⑤ $4 < x \leq 7$

해설

주어진 연립부등식은 다음과 같다.

$5x+3 \leq x+19 \cdots$ ①

$x+19 < 3x+13 \cdots$ ②

부등식 ①을 풀면 $4x \leq 16 \quad \therefore x \leq 4$

부등식 ②를 풀면 $-2x < -6 \quad \therefore x > 3$

$\therefore \ 3 < x \leq 4$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1<5 \\ 5-x \le a+3 \end{cases}$ 이 해를 가질 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $a<5$　　② $a \le 5$　　③ $a>-1$

④ $a<-1$　　⑤ $a \ge -1$

해설

i) $2x-1<5$, $x<3$

ii) $5-x \le a+3$, $x \ge 2-a$

$2-a<3$

$\therefore\ a>-1$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\leq -2$ ② $-1\leq k\leq 2$ ③ $1\leq k\leq 8$

④ $2\leq k\leq 8$ ⑤ $k\leq 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

i) $k=0$일 때 $8x+2\geq 0$에서 $x\geq -\dfrac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ii) $k\neq 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2\geq 0$의 해가 모든 실수이려면

$k>0\cdots$ ㉠

$\dfrac{D}{4}=(k-4)^2-2k\leq 0,\ k^2-10k+16\leq 0,$

$(k-2)(k-8)\leq 0 \quad \therefore 2\leq x\leq 8\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\leq k\leq 8$

i), ii)에서 $2\leq k\leq 8$이다.

6. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$

해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,

즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면

$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이

$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로

$b=a, c=-2a\cdots$(가)

(가)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면

$-2ax^2-ax-a>0,\ 2x^2+x+1>0(\because -a>0)$

이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식

$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로

$2x^2+x+1>0$ 은

모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

따라서 주어진 부등식을 만족하는

한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

7. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(7,\ 5)$를 잇는 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는?

① $3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $5\sqrt{2}$　④ $6\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$\overline{AB}$를 $1:2$ 로 내분하는 점을 $P(x,\ y)$라고 하면,

$$x=\frac{1\times7+2\times1}{3}=\frac{9}{3}=3,$$

$$y=\frac{1\times5+2\times2}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$\overline{AB}$를 $1:2$ 으로 외분하는 점 $Q(x,\ y)$라고 하면,

$$x=\frac{7-2}{-1}=-5,$$

$$y=\frac{5-4}{-1}=-1$$

$\therefore\ P(3,3),\ Q(-5,-1)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(-5-3)^2+(-1-3)^2}$

$=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

8. 세 점 $\mathrm{A}(-2, 9)$, $\mathrm{B}(3, -1)$, $\mathrm{C}(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -6 ② -5 ③ 2 ④ 9 ⑤ 13

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $\dfrac{9-(-1)}{-2-3} = -2$ 이고

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\dfrac{a-(-1)}{5-3}$ 이다.

$\therefore \quad a = -5$

9. $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라고 할 때, $\omega^{2012}+\omega^{2013}+\omega^{2014}$의 값은?

① 3 ② -1 ③ 1 ④ 0 ⑤ 2

해설

문제의 조건에서 ω는

$\omega^2+\omega+1=0$를 만족시키므로

윗식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1$

$\therefore \omega^{2012}+\omega^{2013}+\omega^{2014}$

$=(\omega^3)^{670}\cdot\omega^2+(\omega^2)^{671}+(\omega^3)^{671}\cdot\omega$

$=\omega^2+\omega+1=0$

10. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore \; x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

12. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$

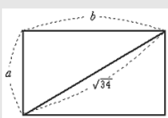
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

13. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로

$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$

$(2-k)\alpha+(k-2)=0$

따라서 $\alpha=1$ 이고

$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

14. 다음 세 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수는 모두 몇 개인가?

㉠ $-\frac{3}{2}x + 6 \geq -9$ ㉡ $3(5-x) + 4x \geq 5$
㉢ $0.4x + 1.2 > 0.9x - 0.8$

① 10개 ② 11개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 14개

해설

㉠ $-\frac{3}{2}x + 6 \geq -9$

$\therefore\ x \leq 10$

㉡ $3(5-x) + 4x \geq 5$

$\therefore\ x \geq -10$

㉢ $0.4x + 1.2 > 0.9x - 0.8$

$\therefore\ x < 4$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 정수는 14개이다.

15. 부등식 $|x^2-4x-6| \le 6$의 해를 구하면?

① $-2 \le x < 6$　　② $0 \le x \le 4$

③ $x \le -2$또는$x \ge 6$　　④ $-2 \le x \le 0$또는$4 \le x \le 6$

⑤ $x \le 0$또는$x \ge 4$

해설

$|x^2-4x-6| \le 6$에서

$$-6 \le x^2-4x-6 \le 6$$

㉠　　㉡

㉠에서 $x^2-4x \ge 0,\ x(x-4) \ge 0$

$\therefore\ x \le 0$또는$x \ge 4$

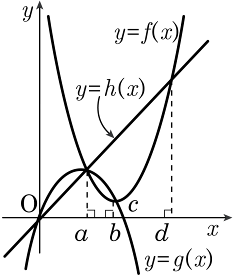
㉡에서 $x^2-4x-12 \le 0,\ (x+2)(x-6) \le 0$

$\therefore\ -2 \le x \le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-2 \le x \le 0$ 또는 $4 \le x \le 6$

16. 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) \le g(x) \le h(x)$의 해는?



① $0 \le x \le a$　　② $a \le x \le b$

③ $b \le x \le c$　　④ $c \le x \le d$

⑤ $a \le x \le d$

해설

그래프에서 $f(x) \le g(x) \le h(x)$인 부분을 찾는다. $\Rightarrow a \le x \le b$

17. 다음은 삼각형 ABC에서 변 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$임을 보이는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡을 차례로 쓴 것을 고르면?

$\overline{BC}$를 x축
$\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 하여
좌표평면을 정하면 점 (㉠)은 원점이다.
이 때, 세 점 A, B, C의 좌표를
각각 (a,b), $(-c,0)$, $(c,0)$으로 놓으면
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$ (㉡) $\cdots$ (가)
$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=$ (㉡) $\cdots$ (나)
(가), (나)에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

① $A, a^2+b^2+c^2$
② $B, a^2+b^2+c^2$
③ $M, a^2+b^2+c^2$
④ $M, 2(a^2+b^2+c^2)$
⑤ $C, 2(a^2+b^2+c^2)$

해설

㉠ $=M$
㉡ $=2(a^2+b^2+c^2)$

18. $A(-1,-1)$, $B(5,-2)$, $C(3,3)$을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 D의 좌표는?

① $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ② $(1, 1)$ ③ $(-3, 4)$

④ $(8, 1)$ ⑤ $\left(4, \frac{1}{2}\right)$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치

$D(x, y)$라 하면

$\overline{AC}$의 중점 : $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, 1)$

$\overline{BD}$의 중점 : $\left(\frac{5+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$

$\frac{5+x}{2} = 1, \frac{-2+y}{2} = 1$

$\therefore\ x = -3, y = 4$

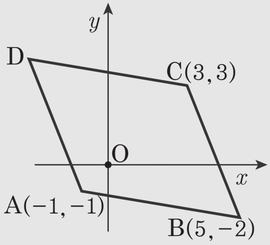
$\therefore\ D(-3, 4)$

해설

B $\to$ C로 갈 때 x축으로 -2, y축으로 $+5$만큼 이동했으므로

A $\to$ D로 갈때도 같은 만큼 이동한다.

$\therefore\ D = (-1-2, -1+5) = (-3, 4)$



19. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3,1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(2,\ 3)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(3,\ 2)$

④ $(2,\ 2)$ ⑤ $(3,\ 1)$

해설

세 점을 $(a,d),(b,e),(c,f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3,1)$ 이므로,

$$\frac{a+b+c}{3}=3,\ \frac{d+e+f}{3}=1\cdots ㉠$$

변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2a+3b}{3+2},\frac{2d+3e}{3+2}\right)=\left(\frac{2a+3b}{5},\frac{2d+3e}{5}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2b+3c}{3+2},\frac{2e+3f}{3+2}\right)=\left(\frac{2b+3c}{5},\frac{2e+3f}{5}\right)$$

$$\mathrm{R}\left(\frac{2c+3a}{3+2},\frac{2f+3d}{3+2}\right)=\left(\frac{2c+3a}{5},\frac{2f+3d}{5}\right)$$ 이며,

$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3},\ \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$$

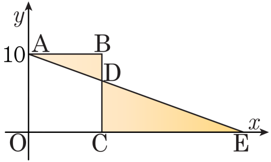
$$=\left(\frac{a+b+c}{3},\ \frac{d+e+f}{3}\right)$$

$\therefore$ ㉠에 의해 $(3,\ 1)$

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore (3,\ 1)$

20. 다음 그림과 같은 정사각형 OABC 가 있다. 변 BC 위의 B, C 가 아닌 한 점 D 를 지나는 직선 AD 를 그을 때, 색칠된 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC 의 넓이와 같다면 직선 AD 의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

다음 그림과 같이 점 D 에서 y 축에 내린 수선의 발을 F 라 하면

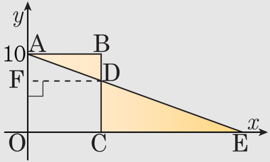
$\triangle$ADB $=$ $\triangle$AFD 이므로

$\square$OCDF $=$ $\triangle$DCE

즉, $\overline{OC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CD}$

$\therefore\ \overline{CE} = 2\overline{OC}$

E(30, 0) 이므로 직선 AD 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$



21. 직선 $kx - y + 3k = 1$는 k값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다. 이 정점 A의 좌표는?

① $\mathrm{A}(-3, -1)$ ② $\mathrm{A}(-2, -1)$ ③ $\mathrm{A}(-1, -1)$
④ $\mathrm{A}(1, -1)$ ⑤ $\mathrm{A}(2, 1)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$(x+3)k - (y+1) = 0$
위 식은 k값에 관계없이
$x+3=0,\ y+1=0$의 교점을 지난다.
$\therefore\ x=-3,\ y=-1$
$\therefore\ \mathrm{A}(-3,\ -1)$

22. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ $-\frac{8}{9}$　⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

i) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ii) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0,\ \ a(9a+8)=0,$

$\therefore a=0,\ \ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$

23. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

24. $3x-8<-(2x+1)$, $\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$을 만족하는 x의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$3x-8<-(2x+1)$

$\therefore\ x<1.4$

$\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x$

$0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$, x는 정수

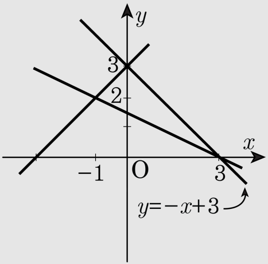
$\therefore\ -0.4 \le x$

따라서 모두 만족하는 x는 없으므로 0개이다.

25. 두 직선 $y=-x+3, y=mx+m+2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설



$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는

m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.

$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$