1. 다음 일차부등식 중 두 부등식을 연립하여 풀었을 때, 해의 개수가 1 이 되는 두 부등식을 골라 기호를 써라.

보기

㉠ $x-4 \geq 4(x+2)$　　㉡ $7(x-1) < 5x+3$

㉢ $x+1 \geq 2(2-x)$　　㉣ $\frac{3}{2}x \geq -2+x$

㉤ $0.2(3x-8) < \frac{1}{5}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $x-4 \geq 4(x+2)$ 에서 $x \leq -4$

㉡ $7(x-1) < 5x+3$ 에서 $x < 5$

㉢ $x+1 \geq 2(2-x)$ 에서 $x \geq 1$

㉣ $\frac{3}{2}x \geq -2+x$ 에서 $x \geq -4$

㉤ $0.2(3x-8) < \frac{1}{5}$ 에서 $x < 3$

따라서 ㉠과 ㉣을 연립하였을 때 $x = -4$로 해의 개수 1개이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 5-x>1 \\ x+3<2x \end{cases}$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3<x<4$

해설

$$\begin{cases} 5-x>1 \\ x+3<2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x>-4 \\ -x<-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>3 \end{cases}$$

$\therefore\ 3<x<4$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\frac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) > 5x+2 \\ -2(x+7) \le 3x+21 \end{cases}$ 을 만족하는 해 중에서 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -12

해설

$3x-6 > 5x+2$, $x < -4$ 이고 $-2x-14 \le 3x+21$, $5x \ge -35$, $x \ge -7$ 이므로 $-7 \le x < -4$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -7 이고 가장 큰 정수는 -5 이므로 -12 이다.

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3x+1 \geq \frac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b=(-2)+1=-1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 4$ ② $4 < a < 7$ ③ $a \le 7$

④ $4 < a \le 7$ ⑤ $4 \le a \le 7$

해설

$\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < \dfrac{a-4}{3} \end{cases}$

정수 x는 $-2, -1, 0$이므로 $0 < \dfrac{a-4}{3} \le 1$

$\therefore\ 4 < a \le 7$

7. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x+4>5x \\ 15-x>a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x+4>5x$

$\therefore\ x>-2$

$15-x>a$

$\therefore\ x<15-a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8<15-a\le 9$

$6\le a<7$

$\therefore\ a=6$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4<-2x+7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2 개일 때, a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 0$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-2 \leq a < -1$

④ $-2 < a \leq -1$ ⑤ $-3 < a \leq -2$

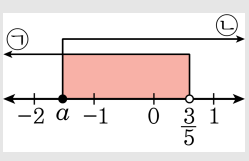
해설

$3x+4<-2x+7$ 에서

$x < \frac{3}{5}$ $\cdots$ ㉠

$x \geq a$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면



$\therefore -2 < a \leq -1$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-3>-x+9 \\ 5x<4x+a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a의 값의 범위는?

① $3<a\le 4$ ② $3<a<4$ ③ $4\le a<5$

④ $4<a\le 5$ ⑤ $5<a\le 6$

해설

$3x-3>-x+9,\ x>3$

$5x<4x+a,\ x<a$

$\therefore\ 3<x<a$

만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5<a\le 6$

10. 연립부등식 $-3 < \frac{x+a}{4} < 1$ 의 해가 $-9 < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$-3 < \frac{x+a}{4} < 1$

$\Rightarrow \begin{cases} -3 < \frac{x+a}{4} \\ \frac{x+a}{4} < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -12 < x+a \\ x+a < 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > -12-a \\ x < 4-a \end{cases}$

$-12-a < x < 4-a$ 이므로 $-12-a = -9$

$\therefore\ a = -3$

$4-a = b$ 이므로 $4-(-3) = b$

$\therefore\ b = 7$

따라서 $a+b = -3+7 = 4$ 이다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \le x+a \\ 2x-b \le 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$\begin{cases} 3x-2 \le x+a & \cdots ① \\ 2x-b \le 3x & \cdots ② \end{cases}$ 이라 하면

①에서 $x \le \dfrac{a+2}{2}$

②에서 $x \ge -b$

$\therefore \ -b \le x \le \dfrac{a+2}{2}$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \le x \le 4$ 이어야 하므로

$-b=4$ 에서 $b=-4$, $\dfrac{a+2}{2}=4$ 에서 $a=6$

따라서 $a-b=6-(-4)=10$ 이다.

12. 두 부등식 $x^2-15x+36<0$, $|8-x|\geq a$을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $1\leq a\leq 2$ ② $2\leq a<3$ ③ $3\leq a<4$

④ $2<a\leq 3$ ⑤ $3<a\leq 4$

해설

$x^2-15x+36<0$에서

$(x-3)(x-12)<0$이므로 $3<x<12$

$|8-x|\geq a$에서

$8-x\geq a$ 또는 $8-x\leq -a$

$\therefore x\leq 8-a,\ x\geq 8+a$

공통부분의 정수의 개수가 3개이므로

$3<x\leq 8-a$에서 2개

$8+a\leq x<12$에서 1개

$\left(\because \dfrac{8-a+8+a}{2}>\dfrac{3+12}{2}\right)$

$\therefore 5\leq 8-a<6,\ 10<8+a\leq 11$

$\therefore -3\leq -a<-2,\ 2<a\leq 3$

$\therefore 2<a\leq 3$

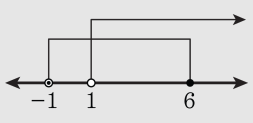
13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6\le 0 \\ (x+k)(x-1)>0 \end{cases}$ 의 해가 $1<x\le 6$ 이 되도록 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k>1$ ② $k\ge 1$ ③ $k<-1$

④ $k>-1$ ⑤ $k\ge -1$

해설

$x^2-5x-6\le 0$,
$(x-6)(x+1)\le 0$,
$-1\le x\le 6$



연립방정식의 해가 $1<x\le 6$이 되려면
$(x+k)(x-1)>0$의 해는 $x>1,\ x<-k$이어야 하고
다음 그림에서 k의 범위는 $-k\le -1,\ k\ge 1$

14. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

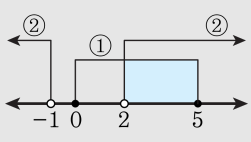
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



15. 직선 $y=2x+1$ 위에 있고, A(2, 1), B(0, −1)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① P(1, 0)　② P(0, 1)　③ P(−1, 0)
④ P(0, −1)　⑤ P(0, 0)

해설

점 $P(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(a-2)^2+4a^2}=\sqrt{a^2+4(a+1)^2}$
$-4a+4=8a+4$
$\therefore\ a=0$
$\therefore$ P(0, 1)

16. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$에 이르는 거리가 같은 점 P의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$

④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ 로 놓으면

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2}$

$= \sqrt{2a^2-2a+5}$

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2}$

$= \sqrt{2a^2-6a+9}$

그런데 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5 = 2a^2-6a+9$

$4a = 4$ 에서 $a = 1$

$\therefore$ P(1, 1)

17. 두 점 A(−5, 1), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 $y=-x$위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

④ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 $P(a, -a)$라 하면 ($\because y=-x$)

$\overline{PA}=\overline{PB}$

$\Rightarrow \overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(a+5)^2+(a+1)^2=(a-4)^2+(a+5)^2$

$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$\therefore P(a,-a)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

18. 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(2,-1)$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a,b)가 $y=x$ 위에 있으므로 $b=a$

$\sqrt{(a-1)^2+(a-6)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2}$

$(a-1)^2+(a-6)^2=(a-2)^2+(a+1)^2$

$-2a+1-12a+36=-4a+4+2a+1$

$-12a=-32$

$\therefore\ a=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=a+a=\frac{8}{3}\times 2=\frac{16}{3}$

19. 두 점 A(1, -3), B(3, 7)에 대하여 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점 P(a, b)와 2: 3으로 외분하는 점 Q(c, d)에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\frac{134}{5}$ ② $-\frac{116}{5}$ ③ $\frac{134}{5}$ ④ $\frac{116}{5}$ ⑤ 20

해설

$$\mathrm{P}(a, b) = \left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3}, \frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$
$$= \left(\frac{9}{5}, 1\right)$$
$$\mathrm{Q}(c, d) = \left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3}, \frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$
$$= (-3, -23)$$
$$\therefore a+b+c+d = \frac{9}{5}+1-3-23 = -\frac{116}{5}$$

20. A(1, 2), B(3, −2) 을 3 : 2로 외분하는 점 C(a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① −3 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

C의 좌표는

$$\left(\frac{3\times 3-2\times 1}{3-2},\ \frac{3\times(-2)-2\times 2}{3-2}\right)=(7,\ -10)$$

$\therefore\ a+b=-3$

21. 두 점 A(2, 3), B(−1, −3) 에 대하여 $\overline{AB}$를 2 : 1 로 외분하는 점 P 의 좌표는?

① P(4, 9)　② P(4, −9)　③ P(−4, −9)
④ P(−4, 9)　⑤ P(9, 4)

해설

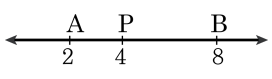
$P(a, b)$ 라 하면,

$a = \dfrac{2\cdot(-1) - 1\cdot 2}{1} = -4,$

$b = \dfrac{2\cdot(-3) - 1\cdot 3}{1} = -9$

∴ P(−4, −9)

22. 다음 수직선 위의 세 점 A, B, P 에 대하여 선분 AP 와 선분 PB 의 길이의 비는?



① 1 : 2 ② 2 : 3 ③ 1 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 1 : 4

해설

선분 AP의 길이는 $4 - 2 = 2$,
선분 PB 의 길이는 $8 - 4 = 4$ 이다.
따라서 선분 AP와 선분 PB 의 길이의 비는
$2 : 4 = 1 : 2$ 이다.

23. 두 점 A(−2, 1), B(4, 7) 의 중점의 좌표는?

① $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $\mathrm{M}(1, 2)$ ③ $\mathrm{M}(1, 4)$
④ $\mathrm{M}\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{M}(2, 2)$

해설

중점 M의 좌표 $\mathrm{M}(x, y)$ 라 하면

$x = \frac{-2+4}{2} = 1$, $y = \frac{1+7}{2} = 4$

따라서 $\mathrm{M}(1, 4)$

24. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$　② $C(3,\ 0)$　③ $C(3,\ 4)$

④ $C(1,\ -1)$　⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

25. 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 3)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

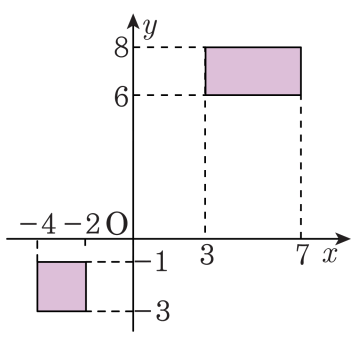
해설

직선 $mx+y-2m=0$
즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 B$(2,\ 0)$을 지난다.
이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D$(-2,\ 3)$을 지나야 한다.

따라서, D$(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

26. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?

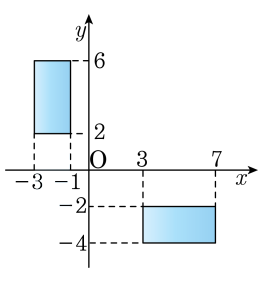


① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$

27. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.
따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A(−2, 4), B(5, −3) 이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$

28. 좌표평면 위의 네 점 A$(-3,\ -3)$, B$(3,\ -3)$, C$(3,\ 5)$, D$(-3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점E의 좌표는?

① $(-4, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(0, 2)$

④ $(1, 2)$ ⑤ $(4, 3)$

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 AC의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (0, 1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상$(0, 1)$ 을 지난다.

29. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ……㉠

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\ \frac{2b+2}{3}-3=0\ ,$$

$a+2b-1=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ 3a+b=5$

30. 직선 $x+ay+1=0$이 $x-y+1=0$과는 수직이고, $x+(2-b)y-1=0$과는 평행일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+ay+1=0\cdots$㉠
$x-y+1=0\cdots$㉡
$x+(2-b)y-1=0\cdots$㉢
㉠⊥㉡ : $1\times1+a\times(-1)=0$
$\therefore\ a=1$
㉠ // ㉢ : $\frac{1}{1}=\frac{a}{2-b}\neq\frac{1}{-1}$
$\Rightarrow a=2-b$
$\Rightarrow 1=2-b$
$\therefore\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

31. 직선 $x+ay-1=0$이 직선 $3x+by+1=0$과 수직이고, 직선 $x-(b+3)y+1=0$과 평행일 때, a^2+b^2의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

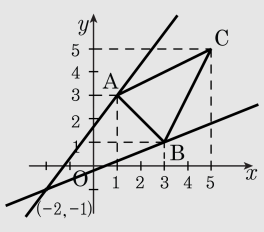
$x+ay-1=0\cdots\cdots$㉠,
$3x+bx+1=0\cdots\cdots$㉡
$x-(b-3)y+1=0\cdots\cdots$㉢
㉠⊥㉡ : $1\cdot 3+a\cdot b=0$에서 $ab=-3$
㉠ // ㉢ : $\frac{1}{1}=\frac{-(b+3)}{a}\neq\frac{1}{-1}$에서 $a+b=-3$
$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=(-3)^2-2\cdot(-3)=15$

32. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 와 직선 $kx-y+2k-1=0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지난다.
그림과 같이 직선 $kx-y+2k-1=0$



즉 $y=k(x+2)-1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

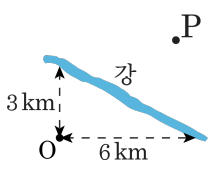
1) 점 A 를 지날 때, $3=k(1+2)-1,\quad k=\frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1=k(3+2)-1,\quad k=\frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5}\le k\le\frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore\ \frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$

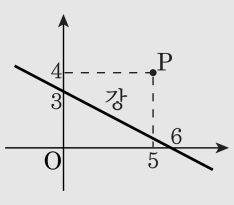
33. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 (5, 4) 이다.

따라서, 점 (5, 4) 에서 직선 $x+2y-6=0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

34. 점 $(3, -5)$와 직선 $4x - 3y - 12 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$d = \frac{|4 \times 3 + (-3) \times (-5) + (-12)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

35. 점 $(2,\ 1)$와 직선 $y=2x+2$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$y=2x+2$ 에서 $2x-y+2=0$

$\therefore$ 구하는 거리는

$$\frac{|2\times 2-1\times 1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

36. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$　② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$　④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

37. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=3$　② $x^2+y^2=1$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$　④ $x^2+y^2=3^2$

⑤ $(x-1)^2+(y-1)^2=3$

해설

$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2 \Rightarrow \quad \therefore \ x^2+y^2=9$

38. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

39. 방정식 $2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$

$\Rightarrow \quad 2(x^2+2x+1-1)+2(y^2-2y+1-1)+3=0$

$\Rightarrow \quad 2(x+1)^2+2(y-1)^2=1$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 반지름 길이 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

40. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$ ⑤ $(4, -4)$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\Rightarrow$ 중심은 $(-2, 3)$

41. 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고, 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2 ② 3.6 ③ 4.2 ④ 4.8 ⑤ 5.2

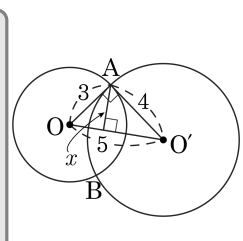
해설

△AOO′ 에서 넓이는 6 이다.

$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$

$\therefore x = \frac{12}{5}$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} =$ 4.8



42. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$ ② $4x-3y+4=0$

③ $3x-3y+4=0$ ④ $x-y+4=0$

⑤ $2x-y+1=0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-(x^2+y^2-4y)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

43. 두 원 $x^2+y^2+4x-ay+b=0$, $x^2+y^2+2x+by+a+2=0$ 의 두 교점을 지나는 직선의 방정식이 $x+y+1=0$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 원의 교점은
$x^2+y^2+4x-ay+b-k(x^2+y^2+2x+by+a+2)=0$ 으로 나타낼 수 있다.
문제에서 교점을 지나는 직선이므로 $k=1$

$\Rightarrow \quad 4x-ay+b-2x-by-a-2=0$

$\Rightarrow \quad x-\dfrac{(a+b)}{2}y+\dfrac{b-a-2}{2}=0$

$\therefore \quad a+b=-2, \quad b-a-2=2$

$\Rightarrow \quad a=-3 \quad b=1$

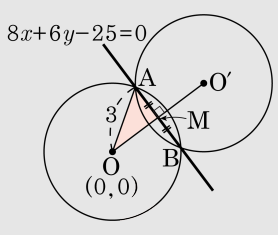
$\therefore a+b=-2$

44. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

(x^2+y^2-9) −

$(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

45. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0\ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

46. 실수 $a,\ b$ 와 두 원

A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

B : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, $a,\ b$ 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$ ② $a+b=1$

③ $a-b=0$ ④ $a^2+b^2=1$

⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(1,\ 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a-1)x+(b-1)y+1=0\cdots\cdots$㉠
㉠이 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로
$(a-1)\times 1+(b-1)\times 1+1=0$
$\therefore a+b=1$

47. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

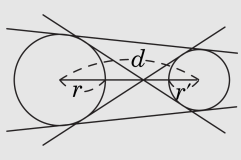
$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

48. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설



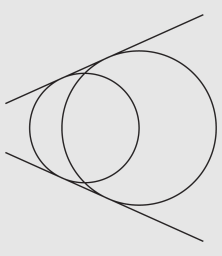
먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r\sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r\sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

49. 두 원 $x^2+y^2=1,\ (x-1)^2+y^2=2$ 의 공통접선의 개수는?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 없다

해설

두 원의 중심거리인 1 보다 두 원의 반지름의 합이 크므로 두 원은 두 점에서 만난다. 따라서 2 개의 공통접선이 생긴다.



50. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > 0, r > 0) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α,β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA}\cdot\overline{OB} =$ (㉯) $\cdot |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 1-m^2,\ |a^2-r^2|$
② $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 1+m^2,\ |a^2-r^2|$
③ $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 2(1-m^2),\ 2|a^2-r^2|$
④ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 2(1+m^2),\ 2|a^2-r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ r(1+m^2),\ r|a^2-r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta = \dfrac{a^2-r^2}{1+m^2}$
$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha),\ \mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \sqrt{\alpha^2+(m\alpha)^2}\cdot\sqrt{\beta^2+(m\beta)^2}$
$= (1+m^2)|\alpha\beta| = |a^2-r^2|$