1. 다음 일차부등식 중 두 부등식을 연립하여 풀었을 때, 해의 개수가 1이 되는 두 부등식을 골라 기호를 써라.

보기

㉠ $x-4 \geq 4(x+2)$

㉡ $7(x-1) < 5x+3$

㉢ $x+1 \geq 2(2-x)$

㉣ $\frac{3}{2}x \geq -2+x$

㉤ $0.2(3x-8) < \frac{1}{5}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $x-4 \geq 4(x+2)$ 에서 $x \leq -4$

㉡ $7(x-1) < 5x+3$ 에서 $x < 5$

㉢ $x+1 \geq 2(2-x)$ 에서 $x \geq 1$

㉣ $\frac{3}{2}x \geq -2+x$ 에서 $x \geq -4$

㉤ $0.2(3x-8) < \frac{1}{5}$ 에서 $x < 3$

따라서 ㉠과 ㉣을 연립하였을 때 $x=-4$로 해의 개수 1개이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 5 - x > 1 \\ x + 3 < 2x \end{cases}$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 4$

해설

$\begin{cases} 5 - x > 1 \\ x + 3 < 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -4 \\ -x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 3 \end{cases}$

$\therefore \ 3 < x < 4$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개　② 3 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\dfrac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) > 5x+2 \\ -2(x+7) \leq 3x+21 \end{cases}$ 을 만족하는 해 중에서 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -12

해설

$3x-6 > 5x+2$, $x < -4$ 이고 $-2x-14 \leq 3x+21$, $5x \geq -35$, $x \geq -7$ 이므로 $-7 \leq x < -4$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -7 이고 가장 큰 정수는 -5 이므로 -12 이다.

5. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+1 \geq \dfrac{1}{2}x-4 \\ 4x-4 < x+2 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3x+1 \geq \dfrac{1}{2}x-4$ 의 양변에 2를 곱하면

$6x+2 \geq x-8$

$5x \geq -10$

$x \geq -2$

$4x-x < 2+4$

$3x < 6$, $x < 2$

그러므로 $-2 \leq x < 2$

$a+b = (-2)+1 = -1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 4$ ② $4 < a < 7$ ③ $a \le 7$

④ $4 < a \le 7$ ⑤ $4 \le a \le 7$

해설

$$\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < \dfrac{a-4}{3} \end{cases}$$

정수 x는 $-2, -1, 0$이므로 $0 < \dfrac{a-4}{3} \le 1$

$\therefore\ 4 < a \le 7$

7. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① $3, 4$　② $5, 6$　③ 6　④ $6, 7$　⑤ $4, 5, 6$

해설

$7x + 4 > 5x$

$\therefore\ x > -2$

$15 - x > a$

$\therefore\ x < 15 - a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8 < 15 - a \leq 9$

$6 \leq a < 7$

$\therefore\ a = 6$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4 < -2x+7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2개일 때, a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 0$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-2 \leq a < -1$

④ $-2 < a \leq -1$ ⑤ $-3 < a \leq -2$

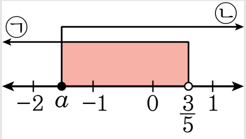
해설

$3x+4 < -2x+7$ 에서

$x < \dfrac{3}{5}$ $\cdots$ ㉠

$x \geq a$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면



$\therefore -2 < a \leq -1$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 3 > -x + 9 \\ 5x < 4x + a \end{cases}$ 를 만족하는 자연수가 2개일 때, a의 값의 범위는?

① $3 < a \leq 4$　② $3 < a < 4$　③ $4 \leq a < 5$
④ $4 < a \leq 5$　⑤ $5 < a \leq 6$

해설

$3x - 3 > -x + 9,\ \ x > 3$

$5x < 4x + a,\ \ \ x < a$

$\therefore\ \ 3 < x < a$

만족하는 자연수가 2개, 즉 4, 5 이므로 $5 < a \leq 6$

10. 연립부등식 $-3 < \dfrac{x+a}{4} < 1$ 의 해가 $-9 < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$-3 < \dfrac{x+a}{4} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < \dfrac{x+a}{4} \\ \dfrac{x+a}{4} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 < x+a \\ x+a < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -12-a \\ x < 4-a \end{cases}$$

$-12-a < x < 4-a$ 이므로 $-12-a = -9$

$\therefore\ a = -3$

$4-a = b$ 이므로 $4-(-3) = b$

$\therefore\ b = 7$

따라서 $a+b = -3+7 = 4$ 이다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \le x+a \\ 2x-b \le 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} 3x-2 \le x+a & \cdots ① \\ 2x-b \le 3x & \cdots ② \end{cases}$ 이라 하면

①에서 $x \le \dfrac{a+2}{2}$

②에서 $x \ge -b$

$\therefore \ -b \le x \le \dfrac{a+2}{2}$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \le x \le 4$ 이어야 하므로

$-b = 4$ 에서 $b = -4$, $\dfrac{a+2}{2} = 4$ 에서 $a = 6$

따라서 $a-b = 6-(-4) = 10$ 이다.

12. 두 부등식 $x^2-15x+36<0$, $|8-x| \geq a$을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때,
a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \leq a \leq 2$ ② $2 \leq a < 3$ ③ $3 \leq a < 4$
④ $2 < a \leq 3$ ⑤ $3 < a \leq 4$

해설

$x^2-15x+36<0$에서
$(x-3)(x-12)<0$이므로 $3<x<12$
$|8-x| \geq a$에서
$8-x \geq a$ 또는 $8-x \leq -a$
$\therefore x \leq 8-a,\ x \geq 8+a$
공통부분의 정수의 개수가 3개이므로
$3<x \leq 8-a$에서 2개
$8+a \leq x < 12$에서 1개
$\left(\because \dfrac{8-a+8+a}{2} > \dfrac{3+12}{2}\right)$
$\therefore 5 \leq 8-a < 6,\ 10 < 8+a \leq 11$
$\therefore -3 \leq -a < -2,\ 2 < a \leq 3$
$\therefore 2 < a \leq 3$

13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6\le 0 \\ (x+k)(x-1)>0 \end{cases}$ 의 해가 $1<x\le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k>1$ ② $k\ge 1$ ③ $k<-1$

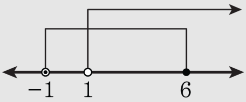
④ $k>-1$ ⑤ $k\ge -1$

해설

$x^2-5x-6\le 0$,

$(x-6)(x+1)\le 0$,

$-1\le x\le 6$



연립방정식의 해가 $1<x\le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1)>0$의 해는 $x>1,\ x<-k$이어야 하고

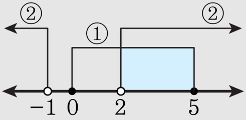
다음 그림에서 k의 범위는 $-k\le -1,\ \ k\ge 1$

14. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

15. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $A(2,\ 1)$, $B(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $P(1,\ 0)$ ② $P(0,\ 1)$ ③ $P(-1,\ 0)$

④ $P(0,\ -1)$ ⑤ $P(0,\ 0)$

해설

점 $P(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$

$-4a + 4 = 8a + 4$

$\therefore\ a = 0$

$\therefore\ P(0,\ 1)$

16. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$에 이르는 거리가 같은 점 P의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$

④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ 로 놓으면

$$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2} = \sqrt{2a^2-2a+5}$$

$$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2} = \sqrt{2a^2-6a+9}$$

그런데 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5 = 2a^2-6a+9$

$4a=4$ 에서 $a=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(1,\ 1)$

17. 두 점 A$(-5,\ 1)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

④ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$라 하면 $(\because\ y=-x)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(a+5)^2+(a+1)^2=(a-4)^2+(a+5)^2$

$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

18. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1, 6)$, $\mathrm{B}(2, -1)$ 에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{8}{3}$　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{12}{3}$　④ $\frac{14}{3}$　⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a, b) 가 $y = x$ 위에 있으므로 $b = a$

$\sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2}$

$(a-1)^2 + (a-6)^2 = (a-2)^2 + (a+1)^2$

$-2a + 1 - 12a + 36 = -4a + 4 + 2a + 1$

$-12a = -32$

$\therefore\ a = \frac{8}{3}$

$\therefore\ a + b = a + a = \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3}$

19. 두 점 $A(1,\ -3)$, $B(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $2\ :\ 3$으로 내분하는 점 $P(a,\ b)$와 $2:\ 3$으로 외분하는 점 $Q(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\dfrac{134}{5}$ ② $-\dfrac{116}{5}$ ③ $\dfrac{134}{5}$ ④ $\dfrac{116}{5}$ ⑤ 20

해설

$$P\ (a,\ b) = \left(\frac{2\times 3+3\times 1}{2+3},\ \frac{2\times 7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$

$$Q\ (c,\ d) = \left(\frac{2\times 3-3\times 1}{2-3},\ \frac{2\times 7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$

$$= (-3,\ -23)$$

$$\therefore\ a+b+c+d = \frac{9}{5}+1-3-23 = -\frac{116}{5}$$

20. A(1, 2), B(3, −2) 을 3 : 2 로 외분하는 점 C(a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① −3　　② −1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.
C 의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times(-2)-2\times2}{3-2}\right)=(7,\ -10)$$

$\therefore\ a+b=-3$

21. 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(-1,\ -3)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점 P 의 좌표는?

① $P(4,\ 9)$ ② $P(4,\ -9)$ ③ $P(-4,\ -9)$

④ $P(-4,\ 9)$ ⑤ $P(9,\ 4)$

해설

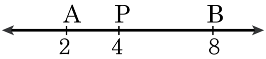
$P(a,\ b)$ 라 하면,

$$a = \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{1} = -4,$$

$$b = \frac{2 \cdot (-3) - 1 \cdot 3}{1} = -9$$

$\therefore\ P(-4,\ -9)$

22. 다음 수직선 위의 세 점 A, B, P 에 대하여 선분 AP 와 선분 PB의 길이의 비는?



① 1 : 2　　② 2 : 3　　③ 1 : 3　　④ 2 : 5　　⑤ 1 : 4

해설

선분 AP의 길이는 $4-2=2$,
선분 PB 의 길이는 $8-4=4$ 이다.
따라서 선분 AP와 선분 PB 의 길이의 비는
$2:4=1:2$ 이다.

23. 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ 7)$ 의 중점의 좌표는?

① $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $\mathrm{M}(1, 2)$ ③ $\mathrm{M}(1, 4)$
④ $\mathrm{M}\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{M}(2, 2)$

해설

중점 M 의 좌표 $\mathrm{M}(x,\ y)$ 라 하면

$x = \frac{-2+4}{2} = 1\ \ , y = \frac{1+7}{2} = 4$

따라서 $\mathrm{M}(1,\ 4)$

24. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$　② $C(3,\ 0)$　③ $C(3,\ 4)$

④ $C(1,\ -1)$　⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

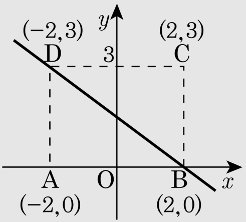
$\therefore\ C(3,0)$

25. 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 3)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

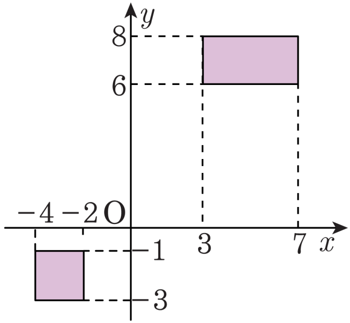
직선 $mx+y-2m=0$
즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 B$(2,\ 0)$을 지난다.
이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D$(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, D$(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

26. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?

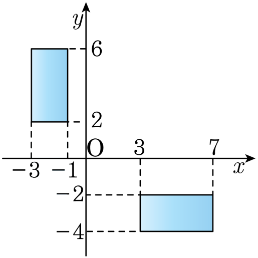


① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

27. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$ 이므로

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-3-4}{5-(-2)}=-1$

28. 좌표평면 위의 네 점 $A(-3,\ -3)$, $B(3,\ -3)$, $C(3,\ 5)$, $D(-3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점E 의 좌표는?

① $(-4, 0)$　② $(0, 1)$　③ $(0, 2)$

④ $(1, 2)$　⑤ $(4, 3)$

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 AC의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (0, 1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상$(0, 1)$ 을 지난다.

29. 두 점 A$(3, 2)$, B(a, b)를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ······ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\,\frac{2b+2}{3}-3=0\,,$$

$a+2b-1=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$$

$\therefore\ 3a+b=5$

30. 직선 $x+ay+1=0$이 $x-y+1=0$과는 수직이고, $x+(2-b)y-1=0$과는 평행일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+ay+1=0 \cdots ㉠$

$x-y+1=0 \cdots ㉡$

$x+(2-b)y-1=0 \cdots ㉢$

$㉠ \perp ㉡$: $1\times 1+a\times(-1)=0$

$\therefore\ a=1$

$㉠ /\!/ ㉢$: $\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{2-b}\neq\dfrac{1}{-1}$

$\Rightarrow a=2-b$

$\Rightarrow 1=2-b$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

31. 직선 $x + ay - 1 = 0$이 직선 $3x + by + 1 = 0$과 수직이고, 직선 $x - (b+3)y + 1 = 0$과 평행일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$x + ay - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠,

$3x + bx + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉡

$x - (b-3)y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉢

㉠⊥㉡ : $1 \cdot 3 + a \cdot b = 0$에서 $ab = -3$

㉠ // ㉢ : $\frac{1}{1} = \frac{-(b+3)}{a} \neq \frac{1}{-1}$에서 $a + b = -3$

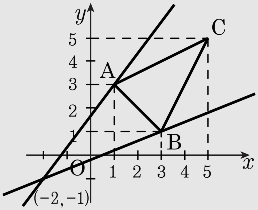
$\therefore\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) = 15$

32. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle$ABC 와 직선 $kx-y+2k-1=0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설



직선의 방정식 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지난다.
그림과 같이 직선 $kx-y+2k-1=0$
즉 $y=k(x+2)-1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

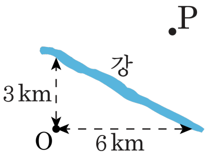
1) 점 A 를 지날 때, $3=k(1+2)-1$, $k=\frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1=k(3+2)-1$, $k=\frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5}\le k\le\frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore\ \frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$$

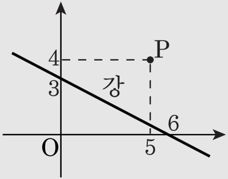
33. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x+2y-6=0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

34. 점 $(3, -5)$ 와 직선 $4x - 3y - 12 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$$d = \frac{|4 \times 3 + (-3) \times (-5) + (-12)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

35. 점 $(2,\ 1)$와 직선 $y=2x+2$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$y=2x+2$ 에서 $2x-y+2=0$

$\therefore$ 구하는 거리는

$$\frac{|2\times2-1\times1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

36. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$

② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$

④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{\mathrm{PA}})^2=(x-2)^2+y^2$

$(\overline{\mathrm{PB}})^2=x^2+(y-2)^2$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

37. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$

④ $x^2 + y^2 = 3^2$

⑤ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

해설

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow \quad \therefore\ x^2 + y^2 = 9$

38. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r라 하면
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2 + (2+3)^2 = r^2$
$\therefore r^2 = 26$

39. 방정식 $2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② 4　③ $\sqrt{2}$　④ 1　⑤ 3

해설

$2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$

$\Rightarrow \quad 2(x^2+2x+1-1)+2(y^2-2y+1-1)+3=0$

$\Rightarrow \quad 2(x+1)^2+2(y-1)^2=1$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 반지름 길이 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

40. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$ ⑤ $(4, -4)$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\Rightarrow \quad$ 중심은 $(-2, 3)$

41. 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고, 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2 ② 3.6 ③ 4.2 ④ 4.8 ⑤ 5.2

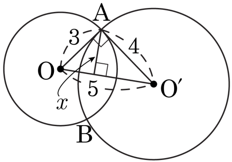
해설

$\triangle$AOO′ 에서 넓이는 6 이다.

$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$

$\therefore x = \frac{12}{5}$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



42. 두 원 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x-5y+4=0$
② $4x-3y+4=0$
③ $3x-3y+4=0$
④ $x-y+4=0$
⑤ $2x-y+1=0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-6y+8-(x^2+y^2-4y)=0$

$2x-2y+8=0$

$\therefore x-y+4=0$

43. 두 원 $x^2+y^2+4x-ay+b=0$, $x^2+y^2+2x+by+a+2=0$ 의 두 교점을 지나는 직선의 방정식이 $x+y+1=0$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

두 원의 교점은

$x^2+y^2+4x-ay+b-k(x^2+y^2+2x+by+a+2)=0$ 으로

나타낼 수 있다.

문제에서 교점을 지나는 직선이므로 $k=1$

$\Rightarrow \quad 4x-ay+b-2x-by-a-2=0$

$$\Rightarrow \quad x-\frac{(a+b)}{2}y+\frac{b-a-2}{2}=0$$

$\therefore \quad a+b=-2, \quad b-a-2=2$

$\Rightarrow \quad a=-3 \quad b=1$

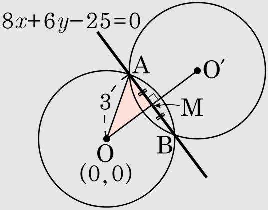
$\therefore a+b=-2$

44. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}$ ······ ㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2} \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

45. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0 \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0,$
$\therefore\ a^2=1$

46. 실수 a, b 와 두 원

A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

B : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$

② $a+b=1$

③ $a-b=0$

④ $a^2+b^2=1$

⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(1,\ 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a-1)x+(b-1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로
$(a-1)\times 1+(b-1)\times 1+1=0$
$\therefore a+b=1$

47. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

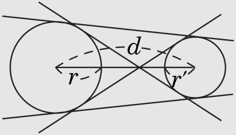
$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

48. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로

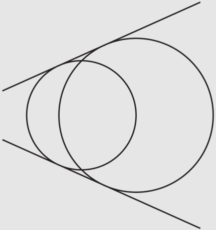
$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

49. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 의 공통접선의 개수는?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 없다

해설

두 원의 중심거리인 1 보다 두 원의 반지름의 합이 크므로 두 원은 두 점에서 만난다. 따라서 2 개의 공통접선이 생긴다.



50. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > \mathrm{O}, r > \mathrm{O}) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ (㉯) $\cdot\, |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 1-m^2,\ |a^2-r^2|$
② $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 1+m^2,\ |a^2-r^2|$
③ $\dfrac{a^2-r^2}{1-m^2},\ 2(1-m^2),\ 2|a^2-r^2|$
④ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ 2(1+m^2),\ 2|a^2-r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2-r^2}{1+m^2},\ r(1+m^2),\ r|a^2-r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$$\alpha\beta = \frac{a^2-r^2}{1+m^2}$$
$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha),\ \mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1+m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$