1. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4　② 8　③ 2　④ -2　⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2-(a^2+ka-2k+b)=0$

$-ka+2k-b=0$

$k(2-a)-b=0$

$\therefore \quad a=2 \quad b=0 \quad a+b=2$

2. x에 관한 이차방정식 $x^2-ax+a+1=0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

두 근을 n, $n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n+(n+1)=a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1)=a+1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n=\dfrac{a-1}{2}$ $\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+1\right)=a+1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5)=0$

$a=-1,\ 5$

$\therefore -1+5=4$

3. 실수 x, y가 $2x+y=4$를 만족할 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x+y=4$ 에서 $y=-2x+4 \cdots$ ㉠

㉠에서 $x^2+y^2 = x^2+(-2x+4)^2$

$$\begin{aligned} &= 5x^2-16x+16 \\ &= 5\left(x^2-\frac{16}{5}x\right)+16 \\ &= 5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5} \end{aligned}$$

따라서 x^2+y^2은 $x=\frac{8}{5}$일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$을 갖는다.

4. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

5. 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a,b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라

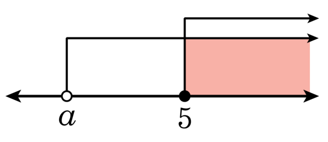
합: $(1+i)+(1-i)+\alpha=3, \alpha=1 \cdots$ ㉠

곱: $(1+i)(1-i)\alpha=2\cdot(1)=-b,\quad b=-2\cdots$ ㉡

$a=(1+i)(1-i)+1(1-i)+1(1+i)=2+1-i+1+i=4$

$a+b=4-2=2$

6. x 에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x - 0.4 \geq 0.6 \\ 0.4 + x > 0.2x - 1.2 \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$0.2x - 0.4 \geq 0.6$ 의 양변에 10을 곱하면

$2x - 4 \geq 6$, $2x \geq 10$

$x \geq 5$

$0.4 + x > 0.2x - 1.2$ 의 양변에 10을 곱하면

$4 + 10x > 2x - 12$

$8x > -16$

$x > -2$

$\therefore a = -2$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+6) > 4a \\ -4(3x-2) > -28 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2(x+6) > 4a$, $x+6 > 2a$

$\therefore\ x > 2a-6$

$-4(3x-2) > -28$, $3x-2 < 7$

$\therefore\ x < 3$

$2a-6 < x < 3$ 이므로 $2a-6 = -2$

$\therefore\ a = 2$

8. 이차방정식 $x^2-(2k+4)x+2k^2+9=0$이 실근을 갖도록 k의 값 또는 범위를 정하면?

① $k<2$

② $k\le 2$

③ $k=2$를 제외한 모든 실수

④ $-4\le k\le 5$

⑤ k의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$(k+2)^2-(2k^2+9)\ge 0$

$k^2-4k+5\le 0$

그런데 $k^2-4k+5=(k-2)^2+1>0$

$\therefore$ k의 값은 존재하지 않는다

9. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

보기

(ⅰ) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ⅱ) 2가 두 근 사이에 있다.

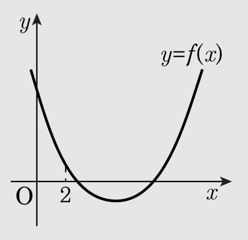
① $8 \le m < 10$, $m > 10$　　② $8 \le m < 10$, $m > 8$

③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$

⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

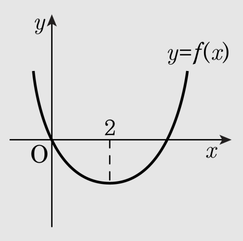
해설

(ⅰ) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ⅱ)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

10. 두 점 $A(1,4)$, $B(3,5)$ 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45 ② 43 ③ 41 ④ 39 ⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(x-1)^2+(-4)^2+(x-3)^2+(-5)^2=2x^2-8x+51$
$=2(x-2)^2+43$

따라서 $x=2$ 일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43이다.

11. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$

$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$

$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$

$10a + 10 = -14a + 13$

$\therefore\ 24a = 3$

$\therefore\ a = \frac{1}{8},\ 2a = \frac{1}{4}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

12. 좌표평면 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 의 삼등분점 중에서 A 에 가까운 점을 $\mathrm{A} * \mathrm{B}$ 라 하자. $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(4,5)$, $\mathrm{C}(-1,3)$ 가 주어졌을 때, $(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C}$ 의 좌표는?

① $(-3,0)$　　② $(1,0)$　　③ $(3,1)$

④ $(-1,3)$　　⑤ $(1,3)$

해설

$\mathrm{A} * \mathrm{B}$ 는 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점이다.
$\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(4,5), \mathrm{C}(-1,3)$ 에서 $A * B = (2,3)$ 이고
따라서 $(\mathrm{A} * \mathrm{B}) * \mathrm{C} = (1,3)$ 이다.

13. 세 점 $\mathrm{A}(3,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$, $\mathrm{C}\ (a+4,\ 2)$이 일직선 위에있을 때, 실수 a의 값들의 곱은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면
$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$의 기울기는 같다.
$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2-3}=\frac{2-1}{(a+4)-2},\ \frac{a-1}{1}=\frac{1}{a+2}$$

$(a-1)\cdot(a+2)=1,\ a^2+a-3=0$

$\therefore$ 실수 a의 값의 곱은 -3

14. 두 직선 $3x+4y+4=0$, $3x+4y+2=0$ 사이의 거리는 얼마인가?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$3x+4y+4=0$ 의 임의의 한점 $(0,\ -1)$ 과
$3x+4y+2=0$ 사이의 거리는
$\frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$

15. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$　② $x-2y+5=0$　③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$　⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $P(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$X=\dfrac{1+a}{2}$, $Y=\dfrac{2+b}{2}$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

16. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{1}{i}=-i,\ \left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

i) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ii) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots-i$

$=1-i$

17. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　　② $11+2i$　　③ 12

④ $12-i$　　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

18. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ −1 ④ 5 ⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1$, $2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

19. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$y = -3x^2 + 6x + 4a$
$\quad = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
$2a - 7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
$(3a+7)(a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{7}{3}$ or 1

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

20. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$
$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

21. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 6개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

$x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$

$x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6$, $y=2$

$x-2=-1$, $y-1=-4$일 때, $x=1$, $y=-3$

$x-2=4$, $y-1=-1$일 때, $x=6$, $y=0$

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

따라서 순서쌍은 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(6, 0)$, $(3, 5)$로 모두 6개이다.

22. 연립부등식 $A: 5(x+2) \leq 26+x$, $B: 1-x < 3(2x+1)$, $C: 3x-5 < -(x+1)$ 에 대하여 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{2}{7} < x < 1$

해설

$A: 5(x+2) \leq 26+x \Rightarrow x \leq 4$

$B: 1-x < 3(2x+1) \Rightarrow x > -\frac{2}{7}$

$C: 3x-5 < -(x+1) \Rightarrow x < 1$

$\therefore -\frac{2}{7} < x < 1$

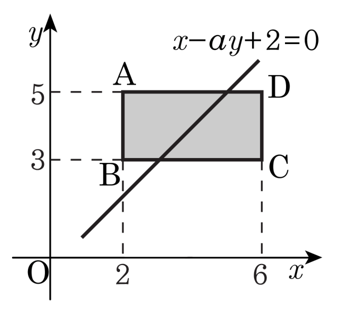
23. 세 꼭짓점이 $A(-1,\ -1)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle ABC$ 의 무게중심은
$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$
즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

24. 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x - ay + 2 = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$

즉 $(4, 4)$ 이다.

직선 $x - ay + 2 = 0$ 이 점 $(4, 4)$ 를 지나야 한다.

따라서 $(4, 4)$ 를 대입하면 $4 - 4a + 2 = 0$

$\therefore\ a = \frac{3}{2}$

25. 한 상자에 빨강, 파랑, 흰색의 구슬이 들어 있다. 파란 구슬의 개수는 흰 구슬의 개수의 $\frac{1}{2}$보다 크거나 같고, 빨간 구슬의 개수의 $\frac{1}{3}$보다 작거나 같다. 한편, 흰 구슬과 파란 구슬의 개수의 합은 55보다 크거나 같다. 이때, 빨간 구슬의 개수의 최솟값을 구하면?

① 57　② 58　③ 59　④ 60　⑤ 61

해설

빨간 구슬의 개수를 a 개, 파란 구슬의 개수를 b 개, 흰색 구슬의 개수를 c 개라 하면,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a \geq b \geq \frac{1}{2}c \cdots ㉠ \\ b + c \geq 55 \cdots ㉡ \end{cases} \quad (\text{단, } a,\ b,\ c\text{는 자연수})$$

$$\begin{array}{rl} & b + c \geq 55 \\ -) & b - \frac{1}{2}c \geq 0 \\ \hline & \frac{3}{2}c \geq 55 \end{array}$$

$c \geq \frac{2}{3} \times 55 = 36.6\cdots \quad \therefore c \geq 37$

㉠ 에서 $b \geq \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \times 37 = 18.5 \quad \therefore\ b \geq 19$

$\frac{1}{3}a \geq 19 \quad \therefore\ a \geq 57$