

1. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + ka - 2k + b = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 2

④ -2

⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$$\Rightarrow D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$$

$$-ka + 2k - b = 0$$

$$k(2 - a) - b = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$$

2. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

두 근을 $n, n+1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots \cdots \text{㉠} \\ n(n+1) = a+1 \cdots \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $n = \frac{a-1}{2} \cdots \cdots \text{㉢}$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2} \left(\frac{a-1}{2} + 1 \right) = a+1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

3. 실수 x, y 가 $2x + y = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{16}{5}$

② $\frac{8}{5}$

③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{12}{5}$

⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$2x + y = 4$ 에서 $y = -2x + 4 \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{에서 } x^2 + y^2 &= x^2 + (-2x + 4)^2 \\ &= 5x^2 - 16x + 16 \\ &= 5 \left(x^2 - \frac{16}{5}x \right) + 16 \\ &= 5 \left(x - \frac{8}{5} \right)^2 + \frac{16}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x^2 + y^2$ 은 $x = \frac{8}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$ 을 갖는다.

4. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면

$$y = 2x - k \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x - k)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 x 에 대한 이차방정식으로 보면

x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$$

$$\therefore -5 \leq k \leq 5$$

따라서 k 의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y 의 값은

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } y = 4 - 5 = -1$$

따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로

$$m + \alpha + \beta = 6$$

5. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

세 근을 $1 + i, 1 - i, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 따라

합: $(1 + i) + (1 - i) + \alpha = 3, \alpha = 1 \cdots \text{㉠}$

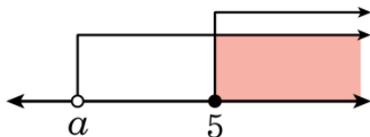
곱: $(1 + i)(1 - i)\alpha = 2 \cdot (1) = -b, b = -2 \cdots \text{㉡}$

$$a = (1 + i)(1 - i) + 1(1 - i) + 1(1 + i) = 2 + 1 - i + 1 + i = 4$$

$$a + b = 4 - 2 = 2$$

6. x 에 대한 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x - 0.4 \geq 0.6 \\ 0.4 + x > 0.2x - 1.2 \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에

나타내면 다음 그림과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$0.2x - 0.4 \geq 0.6$ 의 양변에 10을 곱하면

$$2x - 4 \geq 6, \quad 2x \geq 10$$

$$x \geq 5$$

$0.4 + x > 0.2x - 1.2$ 의 양변에 10을 곱하면

$$4 + 10x > 2x - 12$$

$$8x > -16$$

$$x > -2$$

$$\therefore a = -2$$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+6) > 4a \\ -4(3x-2) > -28 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$2(x+6) > 4a, x+6 > 2a$$

$$\therefore x > 2a - 6$$

$$-4(3x-2) > -28, 3x-2 < 7$$

$$\therefore x < 3$$

$$2a - 6 < x < 3 \text{ 이므로 } 2a - 6 = -2$$

$$\therefore a = 2$$

8. 이차방정식 $x^2 - (2k+4)x + 2k^2 + 9 = 0$ 이 실근을 갖도록 k 의 값 또는 범위를 정하면?

① $k < 2$

② $k \leq 2$

③ $k = 2$ 를 제외한 모든 실수

④ $-4 \leq k \leq 5$

⑤ k 의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$(k+2)^2 - (2k^2+9) \geq 0$$

$$k^2 - 4k + 5 \leq 0$$

$$\text{그런데 } k^2 - 4k + 5 = (k-2)^2 + 1 > 0$$

$\therefore k$ 의 값은 존재하지 않는다

9. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

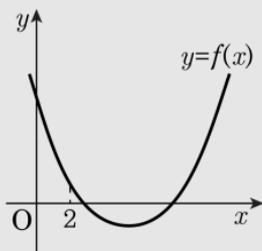
보기

- (i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

- ① $8 \leq m < 10, m > 10$ ② $8 \leq m < 10, m > 8$
③ $-10 \leq m < 10, m > 10$ ④ $-10 \leq m < 10, m > 8$
⑤ $8 \leq m < 10, m > 12$

해설

- (i) 경계값 $x = 2$ 에서



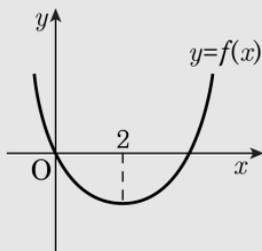
$$f(2) > 0$$

축의 위치 $m - 4 > 2$

판별식 $D \geq 0$

$$\therefore 8 \leq m < 10$$

- (ii)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.

$$\therefore m > 10$$

10. 두 점 $A(1,4)$, $B(3,5)$ 와 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45

② 43

③ 41

④ 39

⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (-4)^2 + (x-3)^2 + (-5)^2 = 2x^2 - 8x + 51 \\ &= 2(x-2)^2 + 43\end{aligned}$$

따라서 $x = 2$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43이다.

11. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$$

$$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$$

$$10a + 10 = -14a + 13$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

12. 좌표평면 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 의 삼등분점 중에서 A 에 가까운 점을 $A * B$ 라 하자. $A(1, 2), B(4, 5), C(-1, 3)$ 가 주어졌을 때, $(A * B) * C$ 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(3, 1)$

④ $(-1, 3)$

⑤ $(1, 3)$

해설

$A * B$ 는 선분 \overline{AB} 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점이다.

$A(1, 2), B(4, 5), C(-1, 3)$ 에서 $A * B = (2, 3)$ 이고

따라서 $(A * B) * C = (1, 3)$ 이다.

13. 세 점 $A(3, a)$, $B(2, 1)$, $C(a+4, 2)$ 이 일직선 위에있을 때, 실수 a 의 값들의 곱은?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으면

\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 의 기울기는 같다.

\overline{AB} 의 기울기와 \overline{BC} 의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2-3} = \frac{2-1}{(a+4)-2}, \quad \frac{a-1}{1} = \frac{1}{a+2}$$

$$(a-1) \cdot (a+2) = 1, \quad a^2 + a - 3 = 0$$

\therefore 실수 a 의 값의 곱은 -3

14. 두 직선 $3x + 4y + 4 = 0$, $3x + 4y + 2 = 0$ 사이의 거리는 얼마인가?

① $\frac{2}{5}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$3x + 4y + 4 = 0$ 의 임의의 한점 $(0, -1)$ 과

$3x + 4y + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

15. 점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x + 4y = 0$

② $x - 2y + 5 = 0$

③ $3x - 4y = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \dots \textcircled{1}$$

\overline{AP} 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

16. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1 - i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1 \end{aligned}$$

ii) $n = 2k - 1$ 일 때

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots - i \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

17. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x + y = 2 + 3i$ 라 할 때, $x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$ 의 값은?

① 13

② $11 + 2i$

③ 12

④ $12 - i$

⑤ 11

해설

$$x + y = 2 + 3i, \quad \bar{x} + \bar{y} = 2 - 3i$$

$$x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$$

$$= x(\bar{x} + \bar{y}) + y(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$= 13$$

18. 이차방정식 $2x^2 + x - 5 = 0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x - \sqrt{41})^2 + (2x - 1)(x + 1)$ 의 값은?

① 4

② 2

③ -1

④ 5

⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

19. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -3x^2 + 6x + 4a \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 4a\end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
 $2a-7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a+7)(a-1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

20. 방정식 $x^3 = 8$ 의 한 허근을 α 라 하고, $z = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$ 이라 할 때, $4z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하면? (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수)

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 13

해설

$$x^3 = 8 \text{에서 } (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 한 허근을 α 라 하면

다른 허근은 $\bar{\alpha}$ 이므로

$$\alpha + \bar{\alpha} = -2, \alpha\bar{\alpha} = 4$$

$$\therefore 4z\bar{z} = 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\bar{\alpha} + 1}{\bar{\alpha} + 2}$$

$$= 4 \times \frac{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 4}$$

$$= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13$$

21. x, y 가 정수일 때 방정식 $xy - x - 2y - 2 = 0$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

$$xy - x - 2y - 2 + 4 = 4$$

$$x(y - 1) - 2(y - 1) = (x - 2)(y - 1) = 4$$

따라서

$$x - 2 = 1, y - 1 = 4 \text{ 일 때, } x = 3, y = 5$$

$$x - 2 = 2, y - 1 = 2 \text{ 일 때, } x = 4, y = 3$$

$$x - 2 = 4, y - 1 = 1 \text{ 일 때, } x = 6, y = 2$$

$$x - 2 = -1, y - 1 = -4 \text{ 일 때, } x = 1, y = -3$$

$$x - 2 = 4, y - 1 = -1 \text{ 일 때, } x = 6, y = 0$$

$$x - 2 = 1, y - 1 = 4 \text{ 일 때, } x = 3, y = 5$$

따라서 순서쌍은 $(3, 5), (4, 3), (6, 2), (1, -3), (6, 0), (3, 5)$ 로 모두 6개이다.

22. 연립부등식 $A : 5(x + 2) \leq 26 + x$, $B : 1 - x < 3(2x + 1)$, $C : 3x - 5 < -(x + 1)$ 에 대하여 해를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{2}{7} < x < 1$

해설

$$A : 5(x + 2) \leq 26 + x \Rightarrow x \leq 4$$

$$B : 1 - x < 3(2x + 1) \Rightarrow x > -\frac{2}{7}$$

$$C : 3x - 5 < -(x + 1) \Rightarrow x < 1$$

$$\therefore -\frac{2}{7} < x < 1$$

23. 세 꼭짓점이 $A(-1, -1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 를 2 : 3으로 내분하는 점을 각각 D , E , F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m : n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

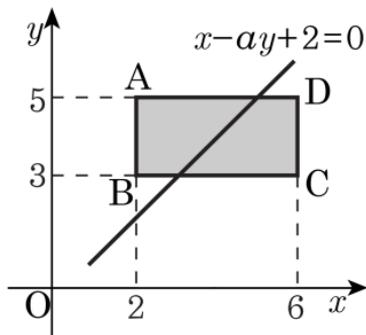
$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1 + 4 + 0}{3}, \frac{-1 + 3 + 1}{3} \right),$$

즉 $(1, 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1, 1)$ 이다.

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

24. 다음 그림에서 $\square ABCD$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x - ay + 2 = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

즉 (4, 4)이다.

직선 $x - ay + 2 = 0$ 이 점 (4, 4)를 지나야 한다.

따라서 (4, 4)를 대입하면 $4 - 4a + 2 = 0$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

25. 한 상자에 빨강, 파랑, 흰색의 구슬이 들어 있다. 파란 구슬의 개수는 흰 구슬의 개수의 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 같고, 빨간 구슬의 개수의 $\frac{1}{3}$ 보다 작거나 같다. 한편, 흰 구슬과 파란 구슬의 개수의 합은 55보다 크거나 같다. 이때, 빨간 구슬의 개수의 최솟값을 구하면?

- ① 57 ② 58 ③ 59 ④ 60 ⑤ 61

해설

빨간 구슬의 개수를 a 개, 파란 구슬의 개수를 b 개, 흰색 구슬의 개수를 c 개라 하면,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a \geq b \geq \frac{1}{2}c \cdots \textcircled{A} \\ b + c \geq 55 \cdots \textcircled{B} \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 자연수}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} b + c \geq 55 \\ -) \quad b - \frac{1}{2}c \geq 0 \\ \hline \frac{3}{2}c \geq 55 \end{array}$$

$$c \geq \frac{2}{3} \times 55 = 36.6 \cdots \quad \therefore c \geq 37$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } b \geq \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \times 37 = 18.5 \quad \therefore b \geq 19$$

$$\frac{1}{3}a \geq 19 \quad \therefore a \geq 57$$