1. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

2. 두 부등식 $0.3x + 1.2 > 0.5x$, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10을 곱하면
$3x + 12 > 5x$
$3x - 5x > -12$
$-2x > -12$
$x < 6$
$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면
$8x - 6 < 9x$
$x > -6$
따라서 $-6 < x < 6$ 이고 정수는
$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 의 11 개이다.

3. 연립부등식 $14-3x \le 8+2x < x+19$를 만족하는 가장 큰 정수 a와 가장 작은 정수 b를 구하여 $a-b$을 구하여라.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$14-3x \le 8+2x < x+19$

$$\begin{cases} 14-3x \le 8+2x \\ 8+2x < x+19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{6}{5} \\ x < 11 \end{cases}$$

가장 큰 정수 $a=10$

가장 작은 정수 $b=2$

$\therefore\ a-b=10-2=8$

4. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \leq -2$　　② $-1 \leq k \leq 2$　　③ $1 \leq k \leq 8$

④ $2 \leq k \leq 8$　　⑤ $k \leq 8$

해설

x^2 의 계수가 미지수 k이므로

ⅰ) $k=0$일 때 $8x+2 \geq 0$에서 $x \geq -\frac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ⅱ) $k \neq 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2 \geq 0$의 해가 모든 실수이려면

$k > 0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-2k \leq 0$, $k^2-10k+16 \leq 0$,

$(k-2)(k-8) \leq 0$　$\therefore 2 \leq x \leq 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$

ⅰ), ⅱ)에서 $2 \leq k \leq 8$이다.

6. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : ______ 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

7. 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,
$a=b^2+1\cdots\cdots$㉠
$l=\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}}\cdots$㉡
㉠를 ㉡에 대입하면
$l=\dfrac{|b^2-b+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$
$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.
따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$이므로
$\therefore\ 4(a+b)=7$

8. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\dfrac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

9. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이

$\alpha,\ \beta,\ r$이므로

$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$

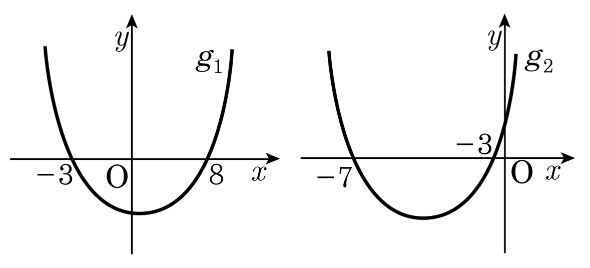
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면

$4\sqrt{2}-6+6$

$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$

$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x+12)(x-2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

11. 두 점 $\mathrm{A}(0, 3)$, $\mathrm{B}(5, -2)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$ ② $(2, 0)$ ③ $(3, 0)$ ④ $(4, 0)$ ⑤ $(5, 0)$

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로, $\alpha^2 + 9 = (\alpha - 5)^2 + 2^2$

$\therefore\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P} = (2, 0)$

12. 세 점 $A(2,\ 5)$, $B(-1,\ 0)$, $C(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$에서 변 BC 위의 점 M에 대하여 $\triangle ABM = \triangle ACM$일 때, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$의 값은?

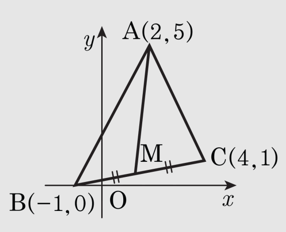
① 25　② 27　③ 29　④ 31　⑤ 33

해설

$\triangle ABM = \triangle ACM$이므로 $\overline{BM} = \overline{CM}$이다.

따라서 파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$



$$\begin{aligned}\therefore\ &\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left\{(-1-2)^2 + (0-5)^2\right\} + \left\{(4-2)^2 + (1-5)^2\right\}\right]\\ &= \frac{1}{2}(9 + 25 + 4 + 16) = 27\end{aligned}$$

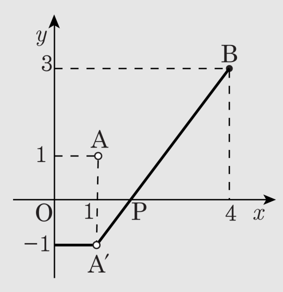
13. 두 점 $A(1,1)$, $B(4,3)$ 에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은?

① 5　② $2\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $8\sqrt{2}$　⑤ 8

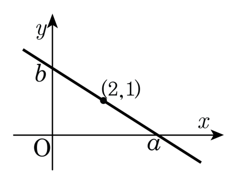
해설

$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 A $(1,1)$ 을 x 축에 대해 대칭이동시킨 $A'(1,\ -1)$ 과 B $(4,3)$ 을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이므로 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25}=5$



14. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$　　② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$　　④ $\frac{2}{a}+b=1$

⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

15. 다음 두 직선 $y = (2a+1)x - a + 2$, $y = (a+2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -1

▷ 정답: $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$(2a+1)(a+2) = -1$

$2a^2 + 5a + 3 = 0$

$(2a+3)(a+1) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

16. 두 점 $A(-2,\ -1)$, $B(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)}=\dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y-1=-\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$

따라서, $a+b=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=1$

17. 두 직선 $2x + 3y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$의 교점을 지나고 직선 $x + 4y - 4 = 0$에 수직인 직선의 방정식이 $y = ax + b$일 때, $a^2 - b^2$의 값은?

① -106 ② -105 ③ -104 ④ -103 ⑤ -102

해설

구하는 직선은 $(2x + 3y + 1) + k(x - 2y + 5) = 0$

$\therefore (2 + k)x + (3 - 2k)y + 5k + 1 = 0 \cdots$ ㉠

㉠과 직선 $x + 4y - 4 = 0$이 수직이므로

$(2 + k) \cdot 1 + (3 - 2k) \cdot 4 = 0$

$14 - 7k = 0$

$\therefore k = 2$

이것을 ㉠에 대입하면 $4x - y + 11 = 0$

$\therefore y = 4x + 11$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 4^2 - 11^2 = 16 - 121 = -105$

18. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0, \quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로
$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$
즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$
$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1\ge 0$
$2a^2-4a-1\le 0$
$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\le a\le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$
$\therefore \alpha+\beta=2$

20. 구슬을 보관함 1 상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면?

① 4 상자　　② 5 상자　　③ 6 상자

④ 7 상자　　⑤ 8 상자

해설

보관함 x상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$ 개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

21. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 1

해설

$|x| < |a| \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\iff ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

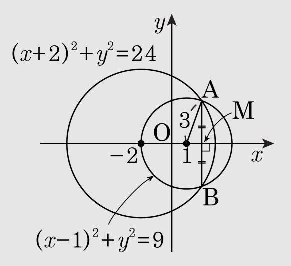
$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

22. 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$
즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의 공통현의 방정식은



$(x^2+y^2-2x-8)-(x^2+y^2+4x-20)=0$
$-6x+12=0$　$\therefore x=2$
$(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과 $x=2$와의 거리 $d=1$
따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,
$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 공통현의 길이는
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

23. x, y, z에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때, $x+y+z$의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x-y+z=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+2z=3a-11 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x-y+2z=2a-2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

① 2 ② -2 ③ 3 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

㉠ $\times 2-$ ㉡에서 $3x-4y=-a+11$

㉡ $-$ ㉢에서 $-2x+3y=a-9$

$\therefore\ x=a-3,\ y=a-5,$

㉠에서 $z=1$

$xyz=(a-3)(a-5)\cdot 1<0$

$\therefore\ 3<a<5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

$x+y+z=(a-3)+(a-5)+1=2a-7>0$

$\therefore\ a>\frac{7}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{7}{2}<a<5 \cdots\cdots$ ㉥

그런데 $x+y+z$는 정수이므로 $2a-7$은 정수이고 $2a$도 정수이다.

㉥에서 $7<2a<10$

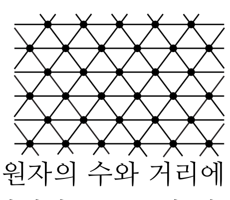
$\therefore\ 2a=8$ 또는 9($\because$ $2a$는 정수)

$\therefore\ a=4$ 또는 $\frac{9}{2}$

$\therefore\ x=1,\ y=-1,\ z=1$ 또는 $x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=1$

$\therefore\ x+y+z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1=2$

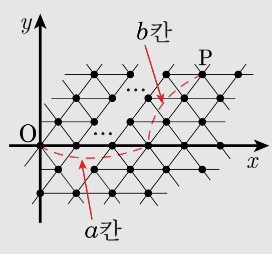
24. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서 점 O 에서 우측으로 a 칸 우상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각하자.



이 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

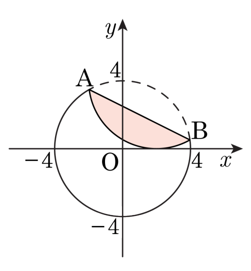
$= a^2 + ab + b^2 = 7$

$4a^2+4ab+4b^2 = (2a+b)^2+3b^2 = 28$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$

25. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 (2, 0) 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



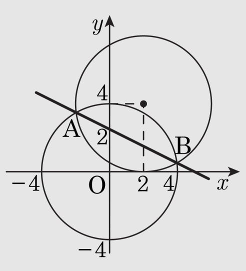
① $x+2y-4=0$　② $x+2y-5=0$

③ $2x+y-6=0$　④ $2x+y-5=0$

⑤ $2x+y-4=0$

해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,
x 축과 점 (2, 0) 에서 접하므로
중심의 좌표가 (2, 4) 가 된다.



즉, 새로운 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4)^2=16$
이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은
$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$
$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$
$4x+8y-20=0$
$\therefore\ x+2y-5=0$